Chalmers tekniska högskola, Matematiska vetenskaper
Tentamen, TMV210 Inledande diskret matematik

Datum: 2020–08–28, tid: 14.00–18.00

Lösningar

1. Är följande logiska formel en tautologi, en kontradiktion eller ingetdera? (4p)

$$\big(p \leftrightarrow (q \vee p)\big) \wedge \big((q \rightarrow p) \wedge (\neg p)\big)$$

Lösning: Eftersom det endast ingår två variabler är det enklast att avgöra detta med hjälp av en sanningstabell.

p	q	$\big(p$	$\leftrightarrow$	$(q$	$\vee$	$p)\big)$	$\wedge$	$\big((q$	$\rightarrow$	$p)$	$\wedge$	$(\neg p)\big)$
S	S	S	S	S	S	S	F	S	S	S	F	F
S	F	S	S	F	S	S	F	F	S	S	F	F
F	S	F	F	S	S	F	F	S	F	F	F	S
F	F	F	S	F	F	F	S	F	S	F	S	S

Eftersom kolumnen under $\wedge$ i mitten innehåller både S och F är formeln varken en tautologi eller en kontradiktion.

Svar: varken en tautologi eller en kontradiktion.

2. Visa med induktion att $3 \mid n^3 + 2n$ för varje positivt heltal n. (6p)

Lösning: Vi kollar först basfallet $n = 1$, som ger $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$, som är delbart med 3. Alltså har vi $3 \mid n^3 + 2n$ då $n = 1$. Nu antar vi att $3 \mid k^3 + 2k$ (induktionsantagandet) och utvecklar $n^3 + 2n$ för $n = k + 1$. Vi får

$$(k + 1)^3 + 2(k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 2k + 2 = k^3 + 2k + (3k^2 + 3k + 3).$$

Vi antog att $k^3 + 2k$ är delbart med 3, och $3k^2 + 3k + 3 = 3(k^2 + k + 1)$ är självklart delbart med 3, så då måste även summan av dessa tal vara delbar med 3. Enligt induktionprincipen har vi nu visat att $n^3 + 2n$ är delbart med 3, det vill säga att $3 \mid n^3 + 2n$, för varje positivt heltal n.

3. Ange alla heltal x som uppfyller $100 < x < 200$ och följande kongruenssystem:

$$\begin{cases} x \equiv 5 \mod 9 \\ 3x \equiv 21 \mod 33 \end{cases}$$

(6p)

Lösning: Vi börjar med att lösa den andra kongruensen, så att vi sedan har ett kongruenssystem där x är ensamt i båda vänsterleden. Eftersom 3 inte är relativt prima med 33 är kongruensen $3x \equiv 21 \mod 33$ *inte* ekvivalent med $x \equiv 7 \mod 33$, utan med $x \equiv 7 \mod 11$. Vi måste alltså även dividera modulus med 3. (För att se detta kan vi uttrycka kongruensen $3x \equiv 21 \mod 33$ som att ekvationen

$$3x + 33y = 21$$

är uppfylld för något heltal y. Men eftersom denna ekvation är ekvivalent med

$$x + 11y = 7$$

betyder det att $x \equiv 7 \mod 11$.) Det ursprungliga kongruenssystemet är alltså ekvivalent med följande:

$$\begin{cases} x \equiv 5 & \text{mod } 9 \\ x \equiv 7 & \text{mod } 11 \end{cases}$$

Nu är moduli 9 och 11 relativt prima, vilket gör att vi kan använda kinesiska restsatsen: det finns en unik lösning modulo $9 \cdot 11 = 99$. För att hitta lösningen behöver vi först hitta heltal u och v sådana att $9u + 11v = 1$. Det kan vi göra med hjälp av Euklides algoritm, eller också kan vi pröva oss fram till att $9 \cdot 5 + 11 \cdot (-4) = 1$. Genom att multiplicera termerna korsvis med högerleden i kongruenssystemet får vi lösningen

$$x \equiv 7 \cdot 9 \cdot 5 + 5 \cdot 11 \cdot (-4) = 315 - 220 = 95 \mod 99$$

alltså $x = 95 + 99k$ för alla heltal k. För att uppfylla villkoret $100 < x < 200$ sätter vi $k = 1$ och får $x = 194$.

Svar: $x = 194$. (3p)

4. Låt $\mathcal{R}$ vara en relation, definierad på någon icke-tom mängd A, som är symmetrisk men inte reflexiv. Antag också att det för varje $x \in A$ finns ett $a \in A$ sådant att $x \mathcal{R} a$. Visa att $\mathcal{R}$ inte kan vara transitiv. (Tips: motsägelsebevis!)

Lösning: Vi gör ett motsägelsebevis. Vi antar alltså att det för alla $x, y, z \in A$ sådana att $x \mathcal{R} y$ och $y \mathcal{R} z$ gäller att $x \mathcal{R} z$. För varje $x \in A$ finns det ett $a \in A$ sådant att $x \mathcal{R} a$, och eftersom $\mathcal{R}$ är symmetrisk innebär det att också $a \mathcal{R} x$. För varje x kan vi alltså hitta $y = a$ och $z = x$ sådana att $x \mathcal{R} y$ och $y \mathcal{R} z$. Enligt antagandet gäller då $x \mathcal{R} z$, det vill säga $x \mathcal{R} x$. Men eftersom $\mathcal{R}$ inte är reflexiv innebär detta en motsägelse. Antagandet att $\mathcal{R}$ är transitiv måste alltså vara falskt, och vi har därmed visat att $\mathcal{R}$ inte kan vara transitiv.

5. (a) Hur många heltal x finns det som uppfyller $1 \leq x \leq 2160$ och är relativt prima med 2160?

Lösning: Detta antal är lika med $\phi(2160)$ enligt definitionen av Eulers ϕ-funktion. Vi faktoriserar 2160 och använder räknereglerna för ϕ-funktionen. Genom att studera siffersumman ser vi att 2160 är delbart med 9, vilket underlättar faktoriseringen. Eftersom talet slutar med en nolla är det förstås även delbart med 10. Vi får

$$\begin{aligned} \phi(2160) &= \phi(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) \\ &= \phi(2^4)\phi(3^3)\phi(5) \\ &= (2^4 - 2^3)(3^3 - 3^2)(5 - 1) \\ &= 8 \cdot 18 \cdot 4 = 576\,. \end{aligned}$$

Svar: 576.

(b) Ange ett heltal y som uppfyller $1 \leq y \leq 2160$ och

$$\frac{y-1}{6} \equiv \sum_{k=0}^{1154} 7^k \mod 2160\,.$$

Lösning: Enligt formeln för en geometrisk summa har vi

$$\sum_{k=0}^{1154} 7^k = \frac{1 - 7^{1155}}{1 - 7} = \frac{7^{1155} - 1}{6}$$

och vi får

$$\frac{y-1}{6} = \sum_{k=0}^{1154} 7^k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y-1}{6} = \frac{7^{1155}-1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad y \equiv 7^{1155}\,.$$

Eftersom 7 är relativt prima med 2160 kan vi använda Eulers sats, som säger att $7^{\phi(2160)} \equiv 1 \mod 2160$. Vi får

$$7^{1155} \equiv 7^{2\cdot 576+3} \equiv 7^{2\cdot 576} \cdot 7^3 \equiv (7^{576})^2 \cdot 7^3 \equiv 1^2 \cdot 7^3 = 343 \mod 2160\,.$$

Svar: $y = 343$.

6. Det finns 24 Tintinalbum med olika färger på ryggarna: 11 album har röd rygg, 6 orange, 3 blå, 3 grön och ett album har gul rygg.

(a) På hur många sätt kan man ställa de nio albumen som har orange eller grön rygg efter varandra i bokhyllan om man bara bryr sig om färgerna, inte titlarna? (Om man till exempel byter plats på två album med grön rygg så är det inget nytt ”sätt”.)

Lösning: Bland de nio albumen kan de tre med grön rygg fördela sig på

$$\binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84$$

olika sätt.

Svar: 84 olika sätt.

(b) Nick ska resa till sin sommarstuga och vill ta med sig fem olika Tintinalbum med fem olika färger på ryggarna. På hur många olika sätt kan han välja ut de fem albumen?

Lösning: Albumet med röd rygg kan väljas på 11 olika sätt, det med orange rygg på 6 olika sätt, och så vidare. Multiplikationsprincipen ger

$$11\cdot 6\cdot 3\cdot 3\cdot 1 = 594$$

olika sätt att välja ut de fem albumen.

Svar: 594 olika sätt.

(c) Väl framme i sin sommarstuga packar Nick upp de fem albumen och ställer dem efter varandra i bokhyllan som han har där. På hur många olika sätt kan han göra detta?

Lösning: Detta är antalet permutationer av fem element, alltså $5! = 120$.

Svar: 120 olika sätt.

7. Låt G_1, G_2, G_3 vara tre grafer som uppfyller vardera uppfyller motsvarande villkor angivet nedan, där V är grafens nodmängd, E är grafens kantmängd, och $P(x,y)$ är predikatet $\{x,y\} \in E$.

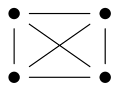
$$\begin{aligned}
G_1 :& \quad \forall x \in V : \forall y \in V : P(x,y)\\
G_2 :& \quad \exists x \in V : \forall y \in V : P(x,y)\\
G_3 :& \quad \exists x \in V : \forall y \in V : \neg P(x,y)
\end{aligned}$$

(a) Rita tre sådana grafer G_1, G_2, G_3.

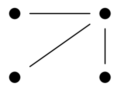
Lösning: Grafen G_1 har en kant mellan varje par av noder, G_2 har en nod med kanter till alla andra noder och i G_3 finns det en nod som inte har någon kant till någon annan nod.

Svar: Till exempel:

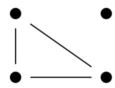
G_1 :



G_2 :



G_3 :



(b) Vilken av graferna en fullständig graf? Vilken av dem kan inte vara en sammanhängande graf? Vilken av graferna kan vara ett träd?

Lösning: Grafen G_1 är en fullständig graf, per definition. Grafen G_2 behöver däremot inte vara fullständig (men kan vara det), och G_3 kan inte vara fullständig. Grafen G_3 kan inte vara sammanhängande; det finns ingen väg mellan den isolerade noden och någon annan nod. De andra två graferna måste däremot vara sammanhängande. Grafen G_2 är den enda av de tre graferna som kan vara ett träd (till exempel om den väljs som ovan). Grafen G_3 kan inte vara ett träd eftersom den inte är sammanhängande, och G_1 har för många kanter för att kunna vara et träd.

Svar: Grafen G_1 är fullständig, G_3 är inte sammanhängande och G_2 kan vara ett träd.

8. Definiera en binär operator $*$ på den kartesiska produkten $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ genom

$$(a, b) * (x, y) = (a + y, b + x)\,.$$

(a) Är operatorn $*$ kommutativ?

Lösning: Vi har till exempel

$$(1, 0) * (0, 1) = (2, 0) \neq (0, 2) = (0, 1) * (1, 0)$$

så $*$ är inte kommutativ.

Svar: Nej.

(b) Är operatorn $*$ associativ?

Lösning: Vi har till exempel

$$\big((0, 0) * (0, 0)\big) * (1, 0) = (0, 0) * (1, 0) = (0, 1)$$

medan

$$(0, 0) * \big((0, 0) * (1, 0)\big) = (0, 0) * (0, 1) = (1, 0)$$

så $*$ är inte associativ.

Svar: Nej.

(c) Finns det någon identitet?

Lösning: Antag att (c, d) är en identitet. Då måste vi till exempel ha

$$(c, d) * (0, 1) = (0, 1) \Leftrightarrow (c + 1, d + 0) = (0, 1)$$

vilket ger $c = -1$ och $d = 1$. Men samtidigt måste vi till exempel också ha

$$(c,d) * (1,0) = (1,0) \Leftrightarrow (c+0, d+1) = (1,0)$$

vilket ger $c = 1$ och $d = -1$. Det finns alltså inget element (c,d) som uppfyller båda villkoren samtidigt, och därmed finns det ingen identitet för denna binära operator.

Svar: Nej.

9. Låt $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vara en talföljd rekursivt definierad för alla heltal $n \geq 0$ genom $a_0 = 0$ och $a_n = a_{n-1} + 1$ för $n \geq 1$. Beräkna summan

$$\sum_{n=0}^{100} (2a_n + 3)\,.$$

Lösning: Vi har $a_n = n$ och får därmed en aritmetisk summa

$$\sum_{n=0}^{100} (2a_n + 3) = \sum_{n=0}^{100} (2n + 3) = 2\sum_{n=0}^{100} n + 3 \cdot 101 = 2 \cdot \frac{100 \cdot 101}{2} + 303 = 10100 + 303 = 10403\,.$$

Svar: $\sum_{n=0}^{20} a_n = 231$.