Tentamen
TMV210 Inledande diskret matematik

2020–01–08 kl. 8.30–12.30

Examinator: Jakob Palmkvist, Matematiska vetenskaper, Chalmers.

Telefonvakt: Oskar Allerbo (ordinarie): anknytning 5325, Jakob Palmkvist: 0707–16 18 92.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna, speciellt inte miniräknare.

För betyget 3 (godkänt) krävs 20 poäng. För betyget 4 krävs 30 poäng och för betyget 5 krävs 40 poäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 29 januari 2020.

OBS!

Använd inte samma sida till flera uppgifter (olika deluppgifter på samma sida går bra). Ange svar tydligt, svara med så enkla uttryck som möjligt, och motivera dina svar väl. Förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte bara svaren. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

Uppgifter

1. Är följande ekvivalens en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (4p)

$$\Big(\big(p \wedge \neg(q \vee r)\big) \;\vee\; (q \wedge r)\Big) \quad \leftrightarrow \quad \Big(\big((q \wedge r) \vee p\big) \;\wedge\; (q \leftrightarrow r)\Big)$$

2. För varje par av reella tal x, y, låt $P(x,y)$ vara predikatet $P(x,y) : x + y = y$. Avgör om var och en av följande utsagor är sann eller falsk. (Glöm inte att motivera svaren!)

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : P(x,y)$

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : P(x,y)$

(4p)

3. Låt A vara mängden av alla heltal x som uppfyller $1 \leq x \leq 12$ och som *inte* är relativt prima med 12.

(a) Ange alla element i A och rita Hassediagrammet för relationen $|$ ("delar") på A. Ange speciellt alla eventuella största, minsta, maximala eller minimala element i A, betraktad som en partiellt ordnad mängd $(A, |)$. (Detta betyder som vanligt att ett element x ska betraktas som "mindre än" ett element y om $x \,|\, y$). (6p)

(b) Beräkna $11^{12}1091^{|A|}$ mod 12. (Ledtråd: $11 \cdot 1091 = 12001$.) (6p)

Var god vänd!

4. Låt U vara mängden av alla *icke-tomma* delmängder till $\mathbb{Z}$ (mängden av alla heltal). Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på U definierad genom

$$A \mathcal{R} B \Leftrightarrow A \cap B \neq \varnothing \,.$$

Två mängder A och B är alltså relaterade till varandra om och endast om de skär varandra. Uppfyller $\mathcal{R}$ någon eller några av egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet? I så fall: vilken eller vilka? Om $\mathcal{R}$ saknar någon eller några av egenskaperna, visa detta genom motexempel. (4p)

5. Låt $*$ vara en associativ operator på en mängd A. Anta att det finns en identitet i A och att varje element $a \in A$ har en invers $a^{-1} \in A$ med avseende på $*$. Visa att funktionen $A \to A\,,\ a \mapsto a^{-1}$ är en involution. (6p)

6. Vid kast av en tärning finns det sex möjliga utfall: ett för varje tal p som tärningen kan visa ($p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Vid kast av fem likadana (men urskiljbara) tärningar finns det då enligt multiplikationsprincipen 6^5 möjliga utfall. I hur många av dessa 6^5 utfall –

(a) – visar alla fem tärningarna samma tal?

(b) – visar de fem tärningarna de fem olika talen $1, 2, 3, 4, 5$ i någon ordning (en av tärningarna visar 1, en annan visar 2, och så vidare)?

(c) – är summan av talen som de fem tärningarna visar lika med 7?

(6p)

7. Visa att

$$6\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

för alla heltal $n \geq 1$. (4p)

8. Låt $G = (V, E)$ vara grafen med nodmängd $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd

$$E = \{(a, b), (a, c), (a, e), (b, c), (b, d), (c, d), (c, e), (d, e), (d, f), (e, f)\}\,.$$

(a) Rita upp grafen G.

(b) Har G någon Eulercykel? Om ja, ge exempel.

(c) Har G någon Eulerväg? Om ja, ge exempel.

(6p)

9. Emil ska ut och resa och ber sin granne Emilia vattna hans krukväxter (en orkidé och en kaktus) medan han är borta. Emil vattnar själv båda krukväxterna samma dag som han åker iväg. Därefter ska orkidén vattnas var elfte dag och kaktusen var nittonde dag. Emilia följer dessa instruktioner. När Emil senare samma år (alltså högst 365 dagar senare) kommer tillbaka har det gått 7 dagar sedan Emilia senast vattnade orkidén och 9 dagar sedan hon senast vattnade kaktusen. Hur många dagar har Emil varit borta? (4p)

Lycka till!