TMV210 Inledande diskret matematik – Tentamen 2020–01–08 – Lösningar

1. Är följande ekvivalens en tautologi, kontradiktion eller ingetdera? (4p)

$$\Big(\big(p \wedge \neg(q \vee r)\big) \;\vee\; (q \wedge r)\Big) \quad \leftrightarrow \quad \Big(\big((q \wedge r) \vee p\big) \;\wedge\; (q \leftrightarrow r)\Big)$$

Lösning: Vi skriver om vänsterledet i ekvivalensen med hjälp av den associativa lagen och de Morgans lag. Vi får

$$\begin{aligned}
\big(p \wedge \neg(q \vee r)\big) \;\vee\; (q \wedge r) \quad &\Leftrightarrow \quad \big(p \;\wedge\; (\neg q \wedge \neg r)\big) \;\vee\; (q \wedge r) \\
&\Leftrightarrow \quad \big(p \;\vee\; (q \wedge r)\big) \;\wedge\; \big((\neg q \wedge \neg r) \;\vee\; (q \wedge r)\big) \\
&\Leftrightarrow \quad \big((q \wedge r) \;\vee\; p\big) \;\wedge\; (q \leftrightarrow r)\,,
\end{aligned}$$

där vi använt att $(\neg q \wedge \neg r) \vee (q \wedge r) \;\Leftrightarrow\; q \leftrightarrow r$ (vilket inses lätt eller visas med en sanningstabell). Vänster- och högerleden är alltså logiskt ekvivalenta, vilket är detsamma som att ekvivalensen är en tautologi. (Man kan förstås också visa detta på en gång med en sanningstabell som inkluderar även p.)

Svar: Ekvivalensen är en tautologi.

2. För varje par av reella tal x, y, låt $P(x, y)$ vara predikatet $P(x, y) : x + y = y$. Avgör om var och en av följande utsagor är sann eller falsk. (Glöm inte att motivera svaren!) (4p)

(a) $\exists x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{R} : P(x, y)$

Lösning: Om vi sätter $x = 0$ så får vi $x + y = y$ för alla $y \in \mathbb{R}$. Alltså finns det ett $x \in \mathbb{R}$ som uppfyller utsagan $\forall y \in \mathbb{R} : x + y = y$.

Svar: Sant.

(b) $\forall x \in \mathbb{R} : \exists y \in \mathbb{R} : P(x, y)$

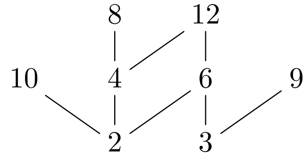
Lösning: Eftersom $x + y = y \Rightarrow x = 0$ får vi en motsägelse för $x \neq 0$. (Vi kan till exempel ta $x = 1$. Då får vi utsagan $\exists y \in \mathbb{R} : 1 + y = y$. Eftersom denna ekvation saknar lösningar är utsagan falsk.)

Svar: Falskt.

3. Låt A vara mängden av alla heltal x som uppfyller $1 \leq x \leq 12$ och som *inte* är relativt prima med 12.

(a) Ange alla element i A och rita Hassediagrammet för relationen $|$ (”delar”) på A. Ange speciellt alla eventuella största, minsta, maximala eller minimala element i A, betraktad som en partiellt ordnad mängd $(A, |)$. (Detta betyder som vanligt att ett element x ska betraktas som ”mindre än” ett element y om $x \,|\, y$). (6p)

Lösning/svar: $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$. Hassediagrammet ser ut så här:



Fyra maximala element: $8, 9, 10, 12$ (det går inga streck uppåt från dessa). Två minimala element: 2 och 3 (det går inga streck nedåt från dessa). Inga största eller minsta element (det finns inget tal i A som delar eller är delbart med alla andra tal i A).

(b) Beräkna $11^{12}1091^{|A|}$ mod 12. (Ledtråd: $11 \cdot 1091 = 12001$.) (6p)

Lösning: Först noterar vi att $|A| = 12 - \Phi(12)$, enligt definitionen av Eulers Φ-funktion. Sedan har vi $1091 \equiv 11^{-1}$ mod 12, eftersom

$$11 \cdot 1091 = 12001 = 1000 \cdot 12 + 1 \equiv 1 \bmod 12$$

och därmed

$$1091^{|A|} = 1091^{12-\Phi(12)} \equiv (11^{-1})^{12-\Phi(12)} \equiv 11^{\Phi(12)}11^{-12} \equiv 1 \cdot 11^{-12} \bmod 12\,,$$

där den sista kongruensen följer av Eulers sats eftersom 11 och 12 är relativt prima. Slutligen får vi

$$11^{12}1091^{|A|} \equiv 11^{12}11^{-12} \equiv 11^{12-12} \equiv 11^{0} \equiv 1 \bmod 12\,.$$

Svar: $11^{12}1091^{|A|} \equiv 1$ mod 12.

4. Låt U vara mängden av alla *icke-tomma* delmängder till $\mathbb{Z}$ (mängden av alla heltal). Låt $\mathcal{R}$ vara en relation på U definierad genom

$$A\,\mathcal{R}\,B \;\Leftrightarrow\; A \cap B \neq \varnothing\,.$$

Två mängder A och B är alltså relaterade till varandra om och endast om de skär varandra. Uppfyller $\mathcal{R}$ någon eller några av egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet? I så fall: vilken eller vilka? Om $\mathcal{R}$ saknar någon eller några av egenskaperna, visa detta genom motexempel. (4p)

Lösning: För alla mängder $A \in U$ har vi $A \cap A = A \neq \varnothing$. Alltså gäller $A\,\mathcal{R}\,A$ och därmed är relationen $\mathcal{R}$ reflexiv. Vidare är den symmetrisk, eftersom $A \cap B = B \cap A$ och därmed

$$A\,\mathcal{R}\,B \;\Leftrightarrow\; A \cap B \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; B \cap A \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; B\,\mathcal{R}\,A\,.$$

Däremot är inte $\mathcal{R}$ antisymmetrisk, för om till exempel $A = \{1,2\}$ och $B = \{2,3\}$ så har vi både $A\,\mathcal{R}\,B$ och $B\,\mathcal{R}\,A$ men $A \neq B$. Relationen $\mathcal{R}$ är inte heller transitiv, för om till exempel $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$ och $C = \{3,4\}$ så har vi $A\,\mathcal{R}\,B$ och $B\,\mathcal{R}\,C$ men $A\,\not\mathcal{R}\,C$.

Svar: Reflexiv och symmetrisk.

5. Låt $*$ vara en associativ operator på en mängd A. Anta att det finns en identitet i A och att varje element $a \in A$ har en invers $a^{-1} \in A$ med avseende på $*$. Visa att funktionen $A \to A\,,\; a \mapsto a^{-1}$ är en involution. (6p)

Lösning: Låt e vara identiteten i A. Då har vi $a * e = e * a = a$ och $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ för alla $a \in A$. Vi ska visa att $(a^{-1})^{-1} = a$ för alla $a \in A$. Associativiteten ger

$$(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1} * e = (a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = \big((a^{-1})^{-1} * a^{-1}\big) * a = e * a = a\,.$$

Man kan också utnyttja satsen som säger att om ett element har en invers med avseende på en associativ operator så är den entydigt bestämd (andra delen av Sats 3.30 i boken, med liknande bevis). Eftersom både $(a^{-1})^{-1}$ och a är inverser till a^{-1} måste då $(a^{-1})^{-1} = a$.

6. Vid kast av en tärning finns det sex möjliga utfall: ett för varje tal p som tärningen kan visa ($p \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Vid kast av fem likadana (men urskiljbara) tärningar finns det då enligt multiplikationsprincipen 6^5 möjliga utfall. I hur många av dessa 6^5 utfall – (6p)

(a) – visar alla fem tärningarna samma tal?

Lösning: Det finns sex olika utfall där alla fem tärningarna visar samma tal, eftersom det finns sex olika tal som de kan visa.

Svar: 6 utfall.

(b) – visar de fem tärningarna de fem olika talen $1, 2, 3, 4, 5$ i någon ordning (en av tärningarna visar 1, en annan visar 2, och så vidare)?

Lösning: Om vi ska välja vilken tärning som ska visa 1 så kan detta ske på 5 olika sätt, därefter kan tärningen som ska visa 2 väljas på 4 olika sätt, och så vidare. Vi får antalet permutationer av fem element, som är $5! = 120$.

Svar: 120 utfall.

(c) – är summan av talen som de fem tärningarna visar lika med 7?

Lösning: Detta kan ske antingen genom att tre av tärningarna visar 1 och de övriga två visar 2 (så att summan blir $1+1+1+2+2 = 7$) eller genom att fyra av tärningarna visar 1 och den sista visar 3 (så att summan blir $1 + 1 + 1 + 1 + 3 = 7$). I det första fallet får vi $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, i det andra fallet får vi $\binom{5}{4} = \binom{5}{1} = 5$. Additionsprincipen ger totalt $10 + 5 = 15$ olika utfall.

Svar: 15 utfall.

7. Visa att

$$6 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 2n^3 + 3n^2 + n$$

för alla heltal $n \geq 1$. (4p)

Lösning: Vi visar detta med hjälp av induktion över n. I basfallet, då $n = 1$, har vi

$$6 \sum_{k=1}^{n} k^2 = 6 \cdot 1^2 = 6\,, \qquad 2n^3 + 3n^2 + n = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 1 = 6\,.$$

Alltså stämmer påståendet då $n = 1$. Anta nu att det stämmer då $n = p$ för något $p \geq 1$. Vi ska visa att det i så fall måste stämma även då $n = p + 1$. Vi har

$$6 \sum_{k=1}^{p+1} k^2 = 6 \sum_{k=1}^{p} k^2 + 6(p+1)^2 = 2p^3 + 3p^2 + p + 6(p^2 + 2p + 1) = 2p^3 + 9p^2 + 13p + 6$$

enligt induktionsantagandet i det andra steget, och

$$\begin{aligned} 2(p+1)^3 + 3(p+1)^2 + (p+1) &= 2(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) + 3(p^2 + 2p + 1) + (p+1) \\ &= 2p^3 + 9p^2 + 13p + 6\,. \end{aligned}$$

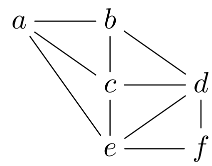
Alltså är vänster- och högerleden lika då $n = p+1$, och enligt induktionsprincipen stämmer påståendet för alla heltal $n \geq 1$.

8. Låt $G = (V, E)$ vara grafen med nodmängd $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ och kantmängd (6p)

$$E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}\}\,.$$

(a) Rita upp grafen G.

Svar:



(b) Har G någon Eulercykel? Om ja, ge exempel.

Lösning: Eftersom G är sammanhängande och inte alla noder har jämnt gradtal finns det ingen Eulercykel.

Svar: Nej.

(c) Har G någon Eulerväg? Om ja, ge exempel.

Lösning: Eftersom G är sammanhängande och det finns två noder med udda gradtal, a och b, finns det en Eulerväg som går från en av dem till den andra, till exempel $a, e, f, d, b, c, d, e, c, a, b$.

Svar: Ja, till exempel $a, e, f, d, b, c, d, e, c, a, b$.

9. Emil ska ut och resa och ber sin granne Emilia vattna hans krukväxter (en orkidé och en kaktus) medan han är borta. Emil vattnar själv båda krukväxterna samma dag som han åker iväg. Därefter ska orkidén vattnas var elfte dag och kaktusen var nittonde dag. Emilia följer dessa instruktioner. När Emil senare samma år (alltså högst 365 dagar senare) kommer tillbaka har det gått 7 dagar sedan Emilia senast vattnade orkidén och 9 dagar sedan hon senast vattnade kaktusen. Hur många dagar har Emil varit borta? (4p)

Lösning: Låt x vara antalet dagar som Emil varit borta. Vi får kongruenssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 7 \mod 11 \\ x \equiv 9 \mod 19 \end{cases}$$

som vi kan lösa med hjälp av kinesiska restsatsen eftersom $\mathrm{sgd}(11, 19) = 1$. Vi kör Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 19 &= 1 \cdot 11 + 8\,, \\ 11 &= 1 \cdot 8 + 3\,, \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2\,, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1\,. \end{aligned}$$

Och så baklänges:

$$\begin{aligned}
1 &= 3 - 1 \cdot 2 \\
&= (11 - 1 \cdot 8) - 1 \cdot (8 - 2 \cdot 3) \\
&= 11 - 2 \cdot 8 + 2 \cdot 3 \\
&= 11 - 2 \cdot (19 - 1 \cdot 11) + 2 \cdot (11 - 1 \cdot 8) \\
&= -2 \cdot 19 + 5 \cdot 11 - 2 \cdot (19 - 1 \cdot 11) \\
&= -4 \cdot 19 + 7 \cdot 11\,.
\end{aligned}$$

Lösningen till kongruenssystemet blir

$$x \equiv 7 \cdot (-4) \cdot 19 + 9 \cdot 7 \cdot 11 = 7(-76 + 99) = 7 \cdot 23 = 161 \mod 11 \cdot 19\,.$$

Eftersom $161 + 11 \cdot 19 = 370 > 365$ är $x = 161$ den enda lösningen som svarar mot att Emil har varit borta kortare tid än ett år.

Svar: 161 dagar.