Tentamen
TMV210 Inledande diskret matematik

2019–10–26 kl. 14.00–18.00

Examinator: Jakob Palmkvist, Matematiska vetenskaper, Chalmers.

Telefonvakt: Anton Johansson (ordinarie), telefon: x5325. Jakob Palmkvist: 0707–16 18 92.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna, speciellt inte miniräknare.

För godkänt på tentan krävs 20 poäng. För betyget 4 krävs 30 poäng och för betyget 5 krävs 40 poäng.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida senast första vardagen efter tentamensdagen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 15 november 2019. Första granskningstillfälle meddelas på kurshemsidan, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

OBS!

Använd inte samma sida till flera uppgifter. Ange svar tydligt, och motivera dina svar väl. Förklara vad du gör, hur och varför. Det är i hög grad beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte bara svaret. Tänk också på att inte fastna för länge i någon uppgift!

Uppgifter

1. (a) Avgör om följande logiska formel är en tautologi, kontradiktion eller ingetdera. (4p)

$$\Big((p \vee q) \wedge \big(p \to (q \wedge r)\big) \wedge (\neg r \to \neg q)\Big) \to r$$

(b) Betrakta predikatet

$$P(X,Y,Z) \quad : \quad X \subseteq Y \cup Z$$

där X, Y och Z är delmängder av något universum U. För var och en av följande utsagor, avgör om den är sann eller falsk. (4p)

$$\forall X : \exists Y : \exists Z : P(X,Z,Y), \qquad \forall X : \exists Y : \forall Z : P(X,Y,Z),$$
$$\exists Y : \forall X : \exists Z : P(X,Y,Z), \qquad \exists X : \forall Y : \forall Z : P(X,Y,Z).$$

2. Vi definierar den binära operatorn $*$ på $\mathbb{R}$ så att

$$x * y = \frac{x+y}{2}$$

för alla x, $y \in \mathbb{R}$. Givet två tal får vi alltså ut deras medelvärde.

(a) Är operatorn $*$ kommutativ? (2p)

(b) Är operatorn $*$ associativ? (2p)

(c) Existerar det någon identitet? (2p)

Var god vänd!

3. Visa att den enda relationen $\mathcal{R}$ på en mängd A som uppfyller alla de fyra egenskaperna reflexivitet, symmetri, antisymmetri och transitivitet är likhetsrelationen $(=)$ på A. Med andra ord, visa att ekvivalensen

$$x\,\mathcal{R}\,y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

gäller då $x, y \in A$ och $\mathcal{R}$ är en relation på A som uppfyller dessa fyra egenskaper. (6p)

4. Visa att likheten

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

gäller för alla heltal m, n, r sådana att $0 \leq r \leq m$ och $r \leq n$. (6p)

5. (a) Hur många heltal x finns det som uppfyller $1 \leq x \leq 1960$ och $\mathrm{sgd}(x, 1960) = 1$? (2p)

(b) Ange ett heltal y sådant att $y \equiv 9^{2019}$ mod 1960 och $0 \leq y \leq 1959$. (2p)

(c) Ange ett heltal z sådant att $z \equiv 3921^{2019}$ mod 1960 och $0 \leq z \leq 1959$. (2p)

6. (a) Hur många ”ord” (med eller utan betydelse) *på fyra bokstäver* kan man bilda av bokstäverna i ordet POTRZEBIE? (Till exempel är BEER ett sådant ord. Varje bokstav i alfabetet får alltså förekomma högst så många gånger som den förekommer i ordet POTRZEBIE.) (2p)

(b) Hur många av orden i (a) innehåller precis ett E? (2p)

(c) Hur många av orden i (a) innehåller två E? (2p)

7. Låt G vara grafen med nodmängd $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och följande grannmatris:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Raderna och kolumnerna är alltså numrerade $1, 2, 3, 4, 5, 6$ uppifrån och ner respektive från vänster till höger.

(a) Rita grafen G. (2p)

(b) Är G bipartit? Motivera! (2p)

(c) Bestäm en funktion $f : V \to V$ sådan att $f \neq \mathrm{id}_V$ och sådan att G är isomorf med sig själv under f. (2p)

8. På en kurs i diskret matematik (som inte pågår längre än en termin) kan man få godkänt på maximalt 23 uppgifter varje vecka. För att få 1 bonuspoäng till tentan krävs 13 godkända uppgifter, för att få 2 bonuspoäng krävs 26 godkända uppgifter, och så vidare. Annika har fått godkänt på alla uppgifter varje vecka, förutom en vecka då hon var sjuk och bara lyckades få godkänt på 20 av de 23 uppgifterna. Detta gör att hon vid kursens slut missar den sista bonuspoängen: för att få maximalt antal bonuspoäng hade hon behövt få godkänt på ytterligare 2 uppgifter. Vad blev Annikas totala antal godkända uppgifter? (6p)

Lycka till!

Lösningar

1. (a) Vi studerar negationen till formeln:

$$\begin{aligned}
&\neg\Big(\big((p\vee q)\wedge\big(p\to(q\wedge r)\big)\wedge(\neg r\to\neg q)\big)\to r\Big)\\
\Leftrightarrow\ &\neg r\wedge(p\vee q)\wedge\big(p\to(q\wedge r)\big)\wedge(\neg r\to\neg q)\\
\Leftrightarrow\ &\begin{cases}\neg r\\ \neg r\to\neg q\\ p\vee q\\ p\to(q\wedge r)\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases}\neg r\\ \neg q\\ p\vee q\\ p\to(q\wedge r)\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases}\neg r\\ \neg q\\ \neg q\to p\\ p\to(q\wedge r)\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases}\neg r\\ \neg q\\ p\\ p\to(q\wedge r)\end{cases}
\Leftrightarrow\begin{cases}\neg r\\ \neg q\\ p\\ q\wedge r\end{cases}\\
\Leftrightarrow\ &p\wedge q\wedge(\neg q)\wedge r\wedge(\neg r)
\end{aligned}$$

Negationen till formeln är alltså en kontradiktion, vilket innebär att den ursprungliga formeln är en tautologi. Med andra ord är argumentet

$$\begin{array}{r}
p\vee q\\
p\to(q\wedge r)\\
\neg r\to\neg q\\
\hline
r
\end{array}$$

giltigt. I härledningen ovan har vi använt de kända logiska ekvivalenserna

$$\neg(p\to q)\ \Leftrightarrow\ p\wedge\neg q\,,\qquad p\vee q\ \Leftrightarrow\ \neg q\to p\,,\qquad p\wedge(p\to q)\ \Leftrightarrow\ p\wedge q\,.$$

(b)

- $\forall X:\exists Y:\exists Z:P(X,Y,Z)$ och $\forall X:\exists Y:\forall Z:P(X,Z,Y)$

  Båda är sanna, eftersom vi för varje X kan välja $Y=X$ och Z godtyckligt. Då får vi $X\subseteq X\cup Z=Y\cup Z$. Den andra av dessa två utsagor implicerar den första.

- $\exists Y:\forall X:\exists Z:P(X,Y,Z)$

  Sant, om vi väljer $y=\varnothing$ så gäller det för alla X att det finns ett Z sådant att $X\subseteq Y\cup Z$, eftersom vi kan välja $Z=X$. Då får vi $X\subseteq X=\varnothing\cup X=Y\cup Z$.

- $\exists X:\forall Y:\forall Z:P(X,Y,Z)$

  Sant, om vi väljer $Y=\varnothing$ så får vi $X\subset Y\cup Z$ för alla Y och Z eftersom tomma mängden är en delmängd till alla mängder.

2. (a) Ja, eftersom

$$x*y-y*x=\frac{x+y}{2}-\frac{y+x}{2}=0.$$

(b) Nej, eftersom

$$\begin{aligned}
(x*y)*z-x*(y*z)&=\frac{1}{2}\left(\frac{x+y}{2}+z\right)-\frac{1}{2}\left(x+\frac{y+z}{2}\right)\\
&=\frac{1}{4}\Big(\big((x+y)+2z\big)-\big(2x+y+z\big)\Big)\\
&=\frac{1}{4}(x+y+2z-2x-y-z)=\frac{1}{4}(-x+z)\neq 0.
\end{aligned}$$

(c) Frågan är om det finns ett reellt tal e sådant att $e * x = x$ för alla reella tal x. Vi har

$$e * x = x \;\Leftrightarrow\; \frac{e+x}{2} = x \;\Leftrightarrow\; e + x = 2x \;\Leftrightarrow\; e = x.$$

Talet e måste alltså vara lika med alla reella tal x samtidigt. Något sådant reellt tal finns förstås inte, och därför saknas identitet för $*$.

3. Vi ska visa de två implikationerna $x \mathcal{R} y \Rightarrow x = y$ och $x = y \Rightarrow x \mathcal{R} y$. Den andra implikation följer av att $\mathcal{R}$ är reflexiv. Eftersom $\mathcal{R}$ är symmetrisk har vi

$$x \mathcal{R} y \;\Leftrightarrow\; y \mathcal{R} x \;\Leftrightarrow\; x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \tag{1}$$

och eftersom $\mathcal{R}$ är antisymmetrisk har vi

$$x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \;\Rightarrow\; x = y \tag{2}$$

Tillsammans ger (1) och (2) att

$$x \mathcal{R} y \;\Rightarrow\; x = y\,.$$

Därmed har vi även visat den första av de två implikationerna ovan.

4. Först ett kombinatoriskt bevis. Anta att vi ska välja ut r element ur en mängd A med $m + n$ element. Anta också att $A = M \cup N$ där $|M| = m$ och $|N| = n$. Då kan vi göra en uppdelning i olika fall: för varje $k = 0, 1, \ldots, r$ kan vi välja k element ur M och $r - k$ element ur N. För varje k har vi då enligt multiplikationsprincipen

$$\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}$$

möjligheter. Enligt additionsprincipen får vi sedan att det totala antalet möjligheter är

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}.$$

Samtidigt vet vi ju att det finns

$$\binom{n+m}{r}$$

sätt att välja ut r element ur en mängd A med $m + n$ element. Därmed följer likheten. Vi kan också visa den med induktion över $m + n$. Då $r = 0$ är likheten uppfylld för alla m, n (eftersom vänsterledet då är lika med 1 och summan i högerledet bara innehåller en enda term, som är lika med $1 \cdot 1$). Speciellt är likheten uppfylld i basfallet $m + n = r = 0$ för då måste vi ha $m = n = 0$. Anta nu att likheten är uppfylld då $m + n = p$ för något $p \geq 0$ och låt m', n' vara heltal sådana att $m' + n' = p + 1$. Minst ett av talen m' och n' måste vara positivt, säg $m' \geq 1$. Vi antar även $r \geq 1$ eftersom vi vet att likheten uppfylld för alla m, n då $r = 0$. Vi får

$$\begin{aligned}
\binom{n+m}{r} &= \binom{n+m-1}{r} + \binom{n+m-1}{r-1} \\
&= \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m-1}{r-k} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\binom{m-1}{r-1-k} \\
&= \binom{n}{r}\binom{m-1}{0} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\binom{m-1}{r-k} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\binom{m-1}{r-1-k} \\
&= \binom{n}{r}\binom{m-1}{0} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\left(\binom{m-1}{r-k} + \binom{m-1}{r-1-k}\right) \\
&= \binom{n}{r}\binom{m-1}{0} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} \\
&= \binom{n}{r}\binom{m}{0} + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k} = \sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{m}{r-k}
\end{aligned}$$

där vi använt sambandet från Pascals triangel i det första steget och induktionsantagandet i det andra.

5. (a) Primtalsfaktoriseringen $1960 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ ger

$$\Phi(1960) = (2-1)2^{3-1}(5-1)(7-1)7^{2-1} = 672\,. \tag{3}$$

(b) Vi har $2019 = 3 \cdot 372 + 3$ och eftersom $\mathrm{sgd}(9, 1960) = 1$ kan vi använda Eulers sats:

$$9^{2019} = 9^{372\cdot 3+3} = 9^{372\cdot 3}9^3 = (9^{372})^3 9^3 = (9^{\Phi(1960)})^3 9^3 \equiv 1^3 \cdot 9^3 = 729 \pmod{1960}$$

(c)

$$3921^{2019} = (2 \cdot 1960 + 1)^{2019} \equiv 1^{2019} \equiv 1 \pmod{1960}$$

6. (a) Antalet ord utan något E är $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. Tillsammans med svaren i (b) och (c) får vi, enligt additionsprincipen, $840 + 840 + 252 = 1932$ möjliga ord.

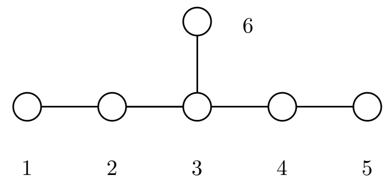
(b) E:et kan finnas på fyra ställen i ordet. På de övriga tre platserna kan bokstäverna väljas på $7 \cdot 6 \cdot 5$ olika sätt. Enligt multiplikationsprincipen är antalet möjliga ord

$$4 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 840$$

(c) De två E:na kan finnas på $\binom{4}{2} = 6$ olika ställen i ordet. På de övriga två platserna kan bokstäverna väljas på $7 \cdot 6$ olika sätt. Enligt multiplikationsprincipen är antalet möjliga ord

$$6 \cdot 7 \cdot 6 = 252$$

7. (a) Grafen har följande utseende:



(b) Ja, om vi delar upp nodmängden V i den disjunkta unionen $V_1 \cup V_2$ där $V_1 = \{1, 3, 5\}$ och $V_2 = \{2, 4, 6\}$ så går varje kant mellan en nod i V_1 och en nod i V_2.

(c) Vi kan låta $f : V \to V$ ges av

$$f(1) = 5\,, \qquad f(2) = 4\,, \qquad f(3) = 3\,, \qquad f(4) = 2\,, \qquad f(5) = 1\,, \qquad f(6) = 6\,.$$

8. Vi får kongruenssystemet

$$\begin{cases} x \equiv -2 \mod 13 \\ x \equiv -3 \mod 23 \end{cases}$$

som vi kan lösa med hjälp av kinesiska restsatsen eftersom $\text{sgd}(13, 23) = 1$. Vi kör Euklides algoritm:

$$\begin{aligned} 23 &= 1 \cdot 13 + 10\,, \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3\,, \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1\,. \end{aligned}$$

Och så baklänges:

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 \\ &= (23 - 13) - 3(13 - 10) \\ &= 23 - 4 \cdot 13 + 3 \cdot 10 \\ &= 23 - 4 \cdot 13 + 3 \cdot (23 - 13) \\ &= 4 \cdot 23 - 7 \cdot 13 \end{aligned}$$

Lösningen till kongruenssystemet blir

$$x \equiv (-2) \cdot 4 \cdot 23 - (-3) \cdot 7 \cdot 13 = 273 - 184 = 89 \quad \mod 13 \cdot 23$$

Eftersom $13 \cdot 23 = 299 > 89$ är $x = 89$ den minsta positiva lösningen. Den svarar mot att kursen har pågått i fyra veckor, eftersom $92 = 23 \cdot 4$. Den näst minsta lösningen är $x = 89 + 13 \cdot 23 = 388$, som svarar mot att kursen har pågått i ytterligare 13 veckor, alltså totalt 17 veckor. Om vi utgår från att en termin omfattar tjugo veckor så är alltså även detta en möjlig lösning.