Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2018-10-27 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Anton Johansson, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2018. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 16 november. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgifter 1, 7, 8 så kan de olika deluppgifterna betraktas som helt oberoende av varandra. I uppgift 6 behöver man räkna ut svaret som ett explicit bas-10 tal *endast* i del (d).

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)
(Obs! $\oplus$ betecknar XOR).

$$\begin{array}{r} p \oplus (q \wedge s) \\ r \to \neg s \vee p \\ s \to r \\ \neg s \to \neg q \\ \hline \neg s \end{array}$$

(b) Låt universumet U bestå av alla män och betrakta följande argument: (3p)

$$\begin{array}{r} \text{Somliga IFK-Göteborg spelare kommer från Göteborg} \\ \text{Somliga IFK-Göteborg spelare heter Glenn} \\ \hline \text{Alla heter Glenn i Göteborg} \end{array}$$

Skriv argumentet i symbolisk logisk form (definiera alla predikaten tydligt !). Argumentet är uppenbarligen ogiltigt - illustrera detta med ett Euler-Venn diagram.

2. Låt $\mathbb{R}^2_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \,\text{och}\, y \geq 0\}$. Låt $\mathcal{L}$ vara mängden av alla linjerna i $\mathbb{R}^2$ och definiera relationen $\mathcal{R}$ på $\mathcal{L}$ enligt följande: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(L_1, L_2) \in \mathcal{L}^2 : L_1 \cap L_2 \cap \mathbb{R}^2_+ \neq \phi\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$?

- I fall du hävdar att en egenskap gäller, motivera väl !

- Annars, ge ett specifikt motexempel.

Var god vänd!

3. Bevisa att för alla heltal $n \geq 2$ gäller (5p)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n^2}.$$

4. (a) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (4.5p)

$$115x + 395y = 10000,$$

samt den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

(b) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till systemet (3.5p)

$$79x \equiv 4 \pmod{23}, \quad x \equiv 1 \pmod{5}.$$

(5p)

5. (a) i. Bestäm $\Phi(396)$.

ii. Rita Hassediagrammet för den partiella ordningen $(D_{396}, |)$, där D_n betecknar mängden av alla positiva heltal som delar n.

(b) Beräkna $5^{2159} \pmod{396}$. (3p)

6. I Fågelriket finns det 10 politiska partier, bl.a. Hackfåglarnas Populära Front (HPF) och Demokratiska Fronten för Hackfåglar (DFH). Riksdagen består av 15 mandat som fördelas geografiskt, ett till var och en av 15 regioner.

(a) Om mandaten skulle fördelas bland partierna slumpmässigt, på hur många sätt kan detta ske om det spelar roll från vilka regioner partierna får sina mandat ? (1.5p)

(b) På hur många sätt kan mandaten fördelas om vi däremot endast tar hänsyn till hur många mandat varje parti får ? (1.5p)

(c) Under samma förutsättningar som i del (a), vad är sannolikheten att både HPF och DFH får exakt 5 mandat var och inget annat parti får mer än ett mandat ? (2p)

(d) I senaste riksdagsval fick HPF 4 mandat, DFH fick 3 mandat och alla övriga partier fick ett mandat vart. På hur många sätt kan man få ihop en regeringskoalition som tillsammans har 8 mandat, om HPF och DFH är bittra fiender som aldrig kan tänka sig regera ihop ? (2p)

7. För grafen G_1 i Figur 1,

(a) Har grafen en Eulerväg och/eller en Eulercykel ? Ange en sådan om den finns. (2p)

(b) Ange och rita fyra olika grupper av 4 noder så att kanterna mellan dessa bildar ett träd. (2p)

(c) Ange en isomorfi mellan G_1 och G_2, dvs numrera noderna i G_2 på ett lämpligt vis. Hur många olika isomorfier finns det mellan de två graferna ? Förklara väl ! (2p)

8. (a) För $n \geq 4$, låt $f(n)$ vara antalet permutationer av talen $1, 2, \ldots, n$ där minst 4 olika tal flyttas. Bestäm en formel för $f(n)$. (3p)

(b) För positiva heltal $n, k \in \mathbb{Z}_+$ låt $S(n, k)$ vara antalet sätt att partitionera mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ i k st. icke-tomma delmängder. Bevisa att, för alla $n \geq k \geq 2$ gäller (4p)

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 181027

1. (a) Argumentet är ogiltigt. Om $p = r = s = 1$, $q = 0$ så blir alla hypoteserna sanna men slutsatsen falsk.

(b) Vi definierar tre predikat på universumet U:

$S(x):$ x är en IFK-Göteborg spelare,
$G(x):$ x kommer från Göteborg,
$\Gamma(x):$ x heter Glenn.

Argumentet lyder då:

$$\begin{array}{r} \exists\, x \;\; S(x) \wedge G(x) \\ \exists\, x \;\; S(x) \wedge \Gamma(x) \\ \hline \forall\, x \;\; G(x) \Rightarrow \Gamma(x) \end{array}$$

Argumentets ogiltighet illustreras i Figur L.1(b).

2. *Reflexivitet*: Nej. Det finns linjer som inte alls träffar den första kvadranten $\mathbb{R}^2_+$, t.ex. linjen $L: y = -x - 1$. Då är $(L, L) \notin \mathcal{R}$.
Symmetri: Ja, trivialt, ty $L_1 \cap L_2 = L_2 \cap L_1$.
Transitivitet: Nej. T.ex. bektrakta

$$L_1: \; y = x, \quad L_2: \; y = -x + 2, \quad L_3: \; y = 2x + 1.$$

Då gäller att $L_1 \cap L_2 = \{(1, 1)\}$, $L_2 \cap L_3 = \{(1/3, 5/3)\}$ och $L_1 \cap L_3 = \{(-1, -1)\}$. De två första punkterna ligger i $\mathbb{R}^2_+$ men inte den tredje. M.a.o. $(L_1, L_2) \in \mathcal{R}$ och $(L_2, L_3) \in \mathcal{R}$ men $(L_1, L_3) \notin \mathcal{R}$.

3. Vi bevisar olikheten med induktion.

Steg 1: Basfallet $n = 2$ måste kontrolleras:

$$\mathrm{VL} = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}, \quad \mathrm{HL} = \frac{5}{4} - \frac{1}{8} = \frac{9}{8}.$$

Så VL=HL, vilket räcker.

Steg 2: Induktionssteget. Antag att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2n^2}. \tag{1}$$

Vi vill härleda att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} \leq \frac{5}{4} - \frac{1}{2(n+1)^2}. \tag{2}$$

Vi har

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} + \frac{1}{(n+1)^3} \overset{(1)}{\leq} \frac{5}{4} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{(n+1)^3},$$

så det räcker att visa att

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{(n+1)^3} &\leq -\frac{1}{2(n+1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} &\leq \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2(n+1)^2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^3} &\leq \frac{2n+1}{2n^2(n+1)^2} \\ \Leftrightarrow 1 &\leq \frac{(2n+1)(n+1)}{2n^2}, \end{aligned}$$

vilket uppenbarligen stämmer för alla $n \geq 1$.

4. (a) Vi kör Euklides på paret (395, 115). Först framåt:

$$\begin{aligned} 395 &= 3 \cdot 115 + 50, \\ 115 &= 2 \cdot 50 + 15, \\ 50 &= 3 \cdot 15 + 5, \\ 15 &= 2 \cdot 5 + 0. \end{aligned}$$

Så SGD(395, 115) $= 5$ och eftersom $5 \mid 10000$ så har ekvationen en lösning. Vi kan lika väl dela ut 5 från hela ekvationen (för att få mindre tal att arbeta med) och lösa den ekvivalenta ekvationen

$$23x + 79y = 2000. \tag{3}$$

Skulle vi köra Euklides framåt på paret (23, 79) så skulle den fortlöpa precis som ovan fast med alla kvoten och resterna delade med 5, alltså

$$\begin{aligned} 79 &= 3 \cdot 23 + 10, \\ 23 &= 2 \cdot 10 + 3, \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

Nu fortsätter vi bakåt:

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 \\ &= 10 - 3(23 - 2 \cdot 10) \\ &= 7 \cdot 10 - 3 \cdot 23 \\ &= 7(79 - 3 \cdot 23) - 3 \cdot 23 \\ &= 7 \cdot 79 - 24 \cdot 23. \end{aligned}$$

Alltså,

$$23 \cdot (-24) + 79 \cdot 7 = 1. \tag{4}$$

Multiplicera igenom med 2000 så har vi vår baslösning till (3)

$$x_0 = -48000, \qquad y_0 = 14000.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = -48000 + 79n, \\ y &= y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n = 14000 - 23n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

För $n = 608$ får vi den enda lösningen med både x och y positiva, nämligen $x = 32$, $y = 16$. Detta är också den lösning som minimerar $|x| + |y|$.

(b) Den första kongruensen kan skrivas om till $x \equiv (79)^{-1} \cdot 4 \pmod{23}$. Från (4) ovan ser vi att $79^{-1} \equiv 7 \pmod{23}$, så $x \equiv 7 \cdot 4 \equiv 28 \equiv 5 \pmod{23}$.
Så vårt system förenklas till

$$x \equiv 5 \pmod{23}, \quad x \equiv 1 \pmod{5}.$$

Enligt Kinesiska restsatsen finns det en unik lösning modulo $23 \cdot 5 = 115$. Lösningen kan hittas med hjälp av den allmänna formeln i KRS, men just här är det ganska lätt att se direkt att $x = 51$ är en lösning. Därför är detta den minsta positiva lösningen och den allmänna lösningen är $x \equiv 51 \pmod{115}$.

5. (a) i. Primtalsfaktoriseringen lyder $396 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11$ så

$$\Phi(396) = \Phi(2^2) \cdot \Phi(3^2) \cdot \Phi(11) = (2^2 - 2^1)(3^2 - 3^1)(11 - 1) = 2 \cdot 6 \cdot 10 = 120.$$

ii. Se Figur L.5(a).

(b) SGD(5, 396) = 1 så vi kan använda Eulers sats, vilket innebär att $5^{120} \equiv 1 \pmod{396}$. Notera dessutom att $2160 = 120 \times 18$. Därför har vi att, modulo 396,

$$5^{2159} \equiv 5^{2160-1} = (5^{120})^{18} \cdot 5^{-1} \equiv 1^{18} \cdot 5^{-1} \equiv 5^{-1}.$$

Men vi kan också lätt konstatera att $395 = 79 \cdot 5$, vilket medför att $5^{-1} \equiv -79 \equiv 317 \pmod{396}$.

6. (a) 10^{15}.

(b) 15 identiska bollar (mandaten) ska placeras i 10 olika lådor (partierna). Antalet möjligheter är således $\binom{15+10-1}{10-1} = \binom{24}{9}$.

(c) Sannolikheten ges av $\frac{N}{10^{15}}$, där N är antalet sätt att fördela mandaten så att villkoren uppfylls. Men

$$N = \binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot P(8, 5),$$

ty vi kan tänka oss att vi

- först väljer de 5 regionerna för HPF:s mandat,
- sedan väljer 5 av de återstående 10 regionerna för DFH:s mandat,
- slutligen väljer 5 av de övriga 8 partierna som ska få de resterande mandaten. Ordningen spelar roll ty det spelar roll vilken region man får sitt mandat ifrån.

Svar: $\frac{\binom{15}{5} \cdot \binom{10}{5} \cdot P(8,5)}{10^{15}}$.

(d) Eftersom HPF och DFH kan inte båda ingå i regeringen så finns det tre olika sorters giltiga regeringar:

(a) varken HPF eller DFH ingår,

(b) HPF ingår men inte DFH,

(c) DFH ingår men inte HPF.

I fall (a) måste regeringen innehålla alla 8 övriga partier, vilket ger 1 möjlighet. I fall (b) måste regeringen innehålla 4 av de 8 övriga partierna, vilket ger $\binom{8}{4}$ möjligheter. I fall (c) måste regeringen innehålla 5 av de 8 övriga partierna, vilket ger $\binom{8}{5} = \binom{8}{3}$ möjligheter.

Så antalet möjligheter för regeringsbildningen är

$$1 + \binom{8}{3} + \binom{8}{4} = 1 + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 1 + 56 + 70 = 127.$$

7. (a) Det finns exakt två noder av udda gradtal, nämligen C och D, så det finns Eulervägar dem emellan, t.ex.

$$C \to D \to G \to E \to A \to F \to E \to C \to A \to B \to G \to C \to B \to D.$$

Däremot finns det inga Eulercykler i grafen.

(b) Se Figur L.7(b).

(c) Se Figur L.7(c) för två olika isomorfier. Dessa är de enda isomorfierna ty, i G_2,

- den unika noden av gradtal 5 måste heta C,
- den unika noden av gradtal 2 måste heta F,
- den unika noden av gradtal 3 måste heta D,
- de två noderna som kopplas till F måste heta A och E,
- de två noderna som kopplas till D, förutom C, måste heta B och G.

I detta läge har vi $2 \cdot 2 = 4$ möjligheter, men dessutom:

- A måste vara kopplad till B och E till G,

vilket lämnar bara de två möjligheterna som är angivna i Figur L.7(c).

8. (a) Vi har $f(n) = n! - g(n)$, där $g(n)$ är antalet permutationer som flyttar högst tre tal. En permutation kan inte flytta exakt ett tal, så om högst tre tal flyttas finns det tre alternativ:

FALL 1: Inget tal flyttas. Då finns det 1 möjlig permutation, nämligen identitetsfunktionen.
FALL 2: Två tal kastas om. I så fall finns det $\binom{n}{2}$ sätt att välja dessa två tal och därmed så många permutationer.
FALL 3: Tre tal flyttas runt i en cykel. I så fall finns det $\binom{n}{3}$ sätt att välja de tre talen och 2 sätt att välja "cykelns riktning", därmed $2 \cdot \binom{n}{3}$ möjliga permutationer.

Ihopläggning ger att

$$f(n) = n! - 1 - \binom{n}{2} - 2 \cdot \binom{n}{3}.$$

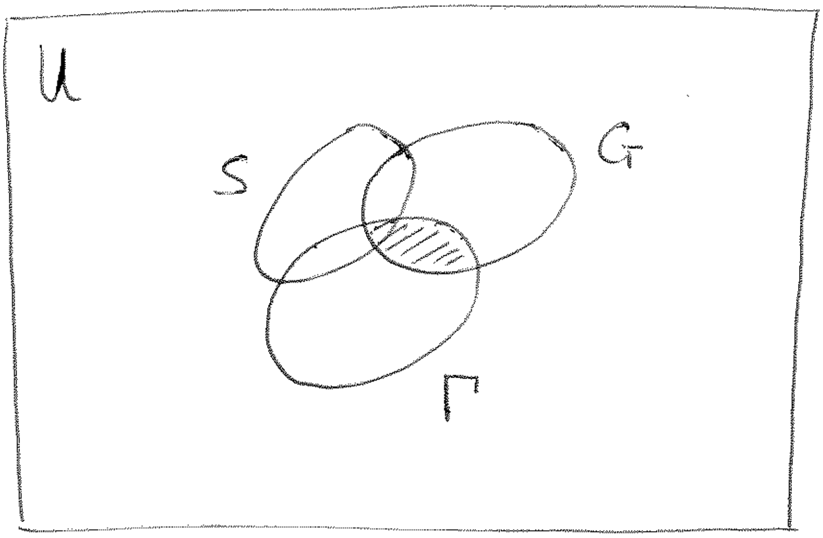
(b) Då vi partitioner mängden $\{1, 2, \ldots, n\}$ finns det följande två alternativ:

FALL 1: $\{n\}$ utgör en egen delmängd. I så fall återstår att partitionera de resterande $n-1$ talen i $k-1$ st. icke-tomma delmängder, vilket kan göras på $S(n-1, k-1)$ sätt.

FALL 2: n blir inte ensam i en delmängd. I så fall ska vi först partitionera de återstående $n-1$ talen i k st. icke-tomma delmängder och sedan välja vilket av dessa ska få elementet n. Det finns $S(n-1, k)$ sätt att göra partitioneringen och sedan k val för var talet n ska placeras, vilket innebär (enligt MP) att det finns totalt $k \cdot S(n-1, k)$ möjliga partitioner i detta fall.

Lägger vi ihop de två fallen (additionsprincipen) så har vi bevisat att $S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$.

Figur L.1(b)



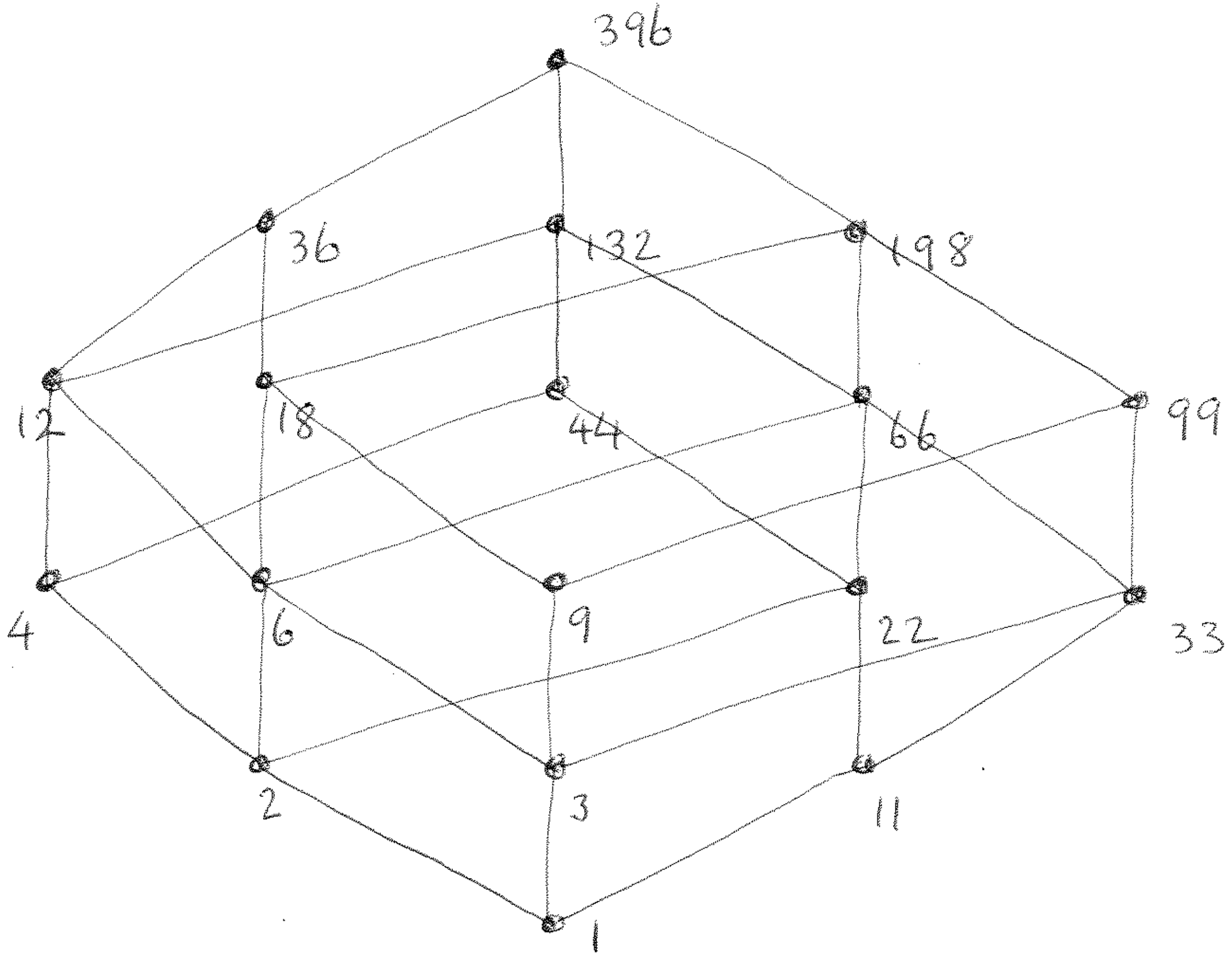
/// = $G \cap \Gamma$

$G \not\subseteq \Gamma \Rightarrow$

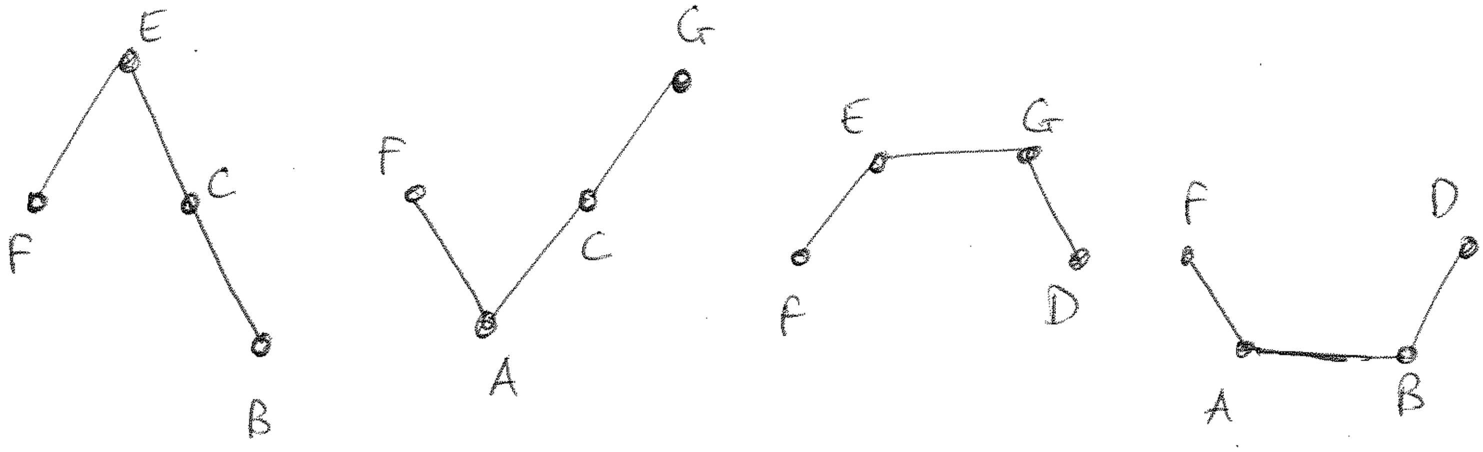
slutsatsen

ogiltigt.

Figur L.5(a)



Figur L.7(b)



Figur L.7(c)