Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2018-08-31 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Helga Kristin Olafsdottir, telefon: 5325 (alt. Peter Hegarty 070-5705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2017. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas i Ladok senast den 21 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.
I uppgifter 1, 5, 7, 8 så är deluppgifterna (a) och (b) helt oberoende av varandra och kan därmed lösas separat.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{r} p \vee q \\ \neg(p \wedge r) \\ s \to q \\ \neg(r \vee s) \to \neg p \\ \hline q \end{array}$$

(b) Låt $U = \mathbb{Z}_+ = \{1, 2, \ldots\}$ och $P(x, y, z) : U^3 \to \{\text{sant, falskt}\}$ vara predikatet

$$P(x, y, z): \quad xy \mid z.$$

Avgör om följande påståendena är sanna eller falska. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{l} \forall x\, \exists y\, \exists z \;\; P(x, y, z) \\ \exists x\, \forall y\, \forall z \;\; P(x, y, z) \\ \forall x\, \forall y\, \exists z \;\; P(x, y, z) \\ \exists x\, \exists y\, \forall z \;\; P(x, y, z) \end{array}$$

Var god vänd!

2. Låt $X = \mathbb{Z}_+$, $Y = \{A \subseteq X : A \text{ är ändlig och } |A| \text{ är ett jämnt tal}\}$.
Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på Y: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(A,\, B) \in Y^2 : |A \cap B| \text{ är ett jämnt tal}\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$?
- I fall du hävdar att en egenskap gäller, motivera väl !
- Annars, ge ett specifikt motexempel.

3. Bestäm med bevis för vilka $n \in \mathbb{N} = \{0,\, 1,\, \ldots\}$ gäller (5p)

$$2^n > 1 + n + \frac{n^2}{2}.$$

(Tips: Induktion).

4. (a) Bestäm $\Phi(273)$, $\Phi(756)$ samt SGD(756, 273). (2p)

(b) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (5p)

$$756x + 273y = 12600,$$

samt alla lösningarna för vilka $|x| + |y| < 100$ gäller.

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser: (4p)

$$3x \equiv 1 \pmod 5, \quad 4x \equiv 2 \pmod 7, \quad 5x \equiv 3 \pmod 8.$$

(b) Bestäm alla positiva heltal $n \in \mathbb{Z}_+$ för vilka $31^n \equiv 1 \pmod{13}$ gäller. Motivera väl ! (3p)

6. Under perioden $12-31$ juli i år (20 dagar) uppmättes varje dygn i Göteborg en medeltemperatur, avrundad till närmaste heltal, mellan $18-24$ grader (7 möjliga värden per dygn alltså)[1]. Hur många möjligheter finns det för

(a) den fullständiga temperaturserien, dvs sekvensen av de 20 uppmätta medelvärdena ? (1.5p)

(b) den oordnade temperaturserien, där vi bara bryr oss om antalet gånger varje värde uppmättes och inte exakt vilka dagar ? (1.5p)

(c) den fullständiga serien om vi vet att de enda uppmätta värdena var 19, 20 och 23 grader, och att dessa uppmättes 5, 6 resp. 9 gånger ? (1.5p)

(d) den fullständiga serien om vi vet att det fanns högst 2 dagar där medeltemp. var 22 grader eller högre ? (2p)

(e) Säg att en serie i (a) väljs på måfå. Vilka av följande två händelser har störst sannolikhet ? Motivera väl ! (1.5p)
Händelse 1: Medelvärdet för hela serien är minst 21 grader.
Händelse 2: Serien innehåller inga 24:or.

Obs! I deluppgifter (a)-(d) behöver man *inte* ge svaren som explicita bas-10 tal.

Var god gå till nästa blad!

[1] Detta är påhittad *fake news*, även om det kanske inte är så långt ifrån sanningen.

7. (a) För grafen G_1 i Figur 1,

i. Ange en Hamiltoncykel i grafen. (1p)

ii. Lägg till en kant så att den nya grafen har en Eulerväg och ange en sådan väg i den nya grafen. (2.5p)

(b) Låt G_2 vara en 4-cykel med numrerade noder, se Figur 2.

i. Skriv upp grannmatrisen M för grafen. (1p)

ii. Utan att utföra någon matrismultiplikation, bestäm de stjärnmärkta elementen i matriserna nedan: (2.5p)

$$M^4 = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & * & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad M^{16} = \begin{bmatrix} \cdot & * & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}.$$

8. (a) Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras av följande information: (2p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_3 = 3, \qquad a_{n+3} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}} \; \forall\, n \geq 0.$$

Bestäm a_{2018}. Ingen motivering behövs !

(b) För positiva heltal n, $k \in \mathbb{Z}_+$ låt $p(n, k)$ vara antalet sätt att skriva n som en summa av k st positiva heltal, utan hänsyn till ordning. (5p)

Exempel: $p(7, 3) = 4$ ty det finns följande skrivsätt

$$7 = 5 + 1 + 1 = 4 + 2 + 1 = 3 + 3 + 1 = 3 + 2 + 2.$$

Bevisa att

$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k). \tag{1}$$

(Obs! Man måste sätta $p(\cdot, \cdot) = 0$ så snart minst en av variablerna är mindre än eller lika med noll för att (1) ska alltid make:a sense. Den teknikaliteten behöver du inte grubbla över i ditt bevis.)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 180831

1. (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen q är falsk men alla hypoteserna sanna. Då måste p vara sann enligt H1 och s vara falsk enligt H3. Att p är sann medför att r är falsk enligt H2. Men då är hypotesen i H4 sann och slutsatsen falsk, dvs H4 är falsk, en motsägelse.

(b) i. Sant. Oavsett x kan vi alltid hitta positiva heltal y, z så att $xy \mid z$. T.ex. välj $y = 1$, $z = x$.

ii. Falskt. Oavsett x så kommer inte $xy \mid z$ att stämma om t.ex. $y > z$.

iii. Sant. Oavsett x, y kan vi alltid hitta ett z så att $xy \mid z$. T.ex. välj $z = xy$.

iv. Sant. Välj $x = y = 1$.

2. *Reflexivitet*: Ja. $|A \cap A| = |A|$, vilket alltid är ett jämnt tal per defintion av Y.
Symmetri: Ja, ty $|A \cap B| = |B \cap A|$.
Transitivitet: Nej. T.ex. välj $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{1, 3\}$. Då är $|A \cap B| = |B \cap C| = 2$, men $|A \cap C| = 1$.

3. Olikheten stämmer inte för $n \in \{0, 1, 2, 3\}$, vilket kan kontrolleras direkt, men gör det för alla $n \geq 4$. Vi bevisar det senare med induktion.

Steg 1: Basfallet $n = 4$ måste kontrolleras:

$$2^4 = 16 > 13 = 1 + 4 + \frac{4^2}{2}.$$

Steg 2: Induktionssteget. Antag att

$$2^n > 1 + n + \frac{n^2}{2}. \tag{1}$$

Vi vill härleda att

$$2^{n+1} > 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2}. \tag{2}$$

Vi har

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > \text{ enligt (1) } > 2\left(1 + n + \frac{n^2}{2}\right),$$

så det räcker att visa att

$$\begin{aligned} 2\left(1 + n + \frac{n^2}{2}\right) &> 1 + (n+1) + \frac{(n+1)^2}{2} \\ \Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 &> \frac{5}{2} + 2n + \frac{n^2}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{n^2}{2} &> \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; n > 1, \end{aligned}$$

vilket stämmer ty $n \geq 4$ antas.

4. (a) Primtalsfaktoriseringarna lyder

$$273 = 3 \cdot 7 \cdot 13, \qquad 756 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7.$$

Så

$$\begin{aligned} \Phi(273) &= (3-1)(7-1)(13-1) = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144, \\ \Phi(756) &= (2^2 - 2^1)(3^3 - 3^2)(7-1) = 2 \cdot 18 \cdot 6 = 216, \\ \mathrm{SGD}(273,\, 756) &= 3 \cdot 7 = 21. \end{aligned}$$

(b) Vi kan dela igenom med 21 för att få den ekvivalenta ekvationen

$$36x + 13y = 600. \tag{3}$$

Vi kör Euklides på paret (36, 13). Först framåt:

$$\begin{aligned} 36 &= 2 \cdot 13 + 10, \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3, \\ 10 &= 3 \cdot 3 + 1, \end{aligned}$$

sedan bakåt

$$\begin{aligned} 1 &= 10 - 3 \cdot 3 \\ &= 10 - 3(13 - 10) \\ &= 4 \cdot 10 - 3 \cdot 13 \\ &= 4(36 - 2 \cdot 13) - 3 \cdot 13 \\ &= 4 \cdot 36 - 11 \cdot 13. \end{aligned}$$

Alltså,

$$36 \cdot 4 + 13 \cdot (-11) = 1.$$

Multiplicera igenom med 600 så har vi vår baslösning till (3)

$$x_0 = 2400, \qquad y_0 = -6600.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 - \left(\frac{b}{d}\right) n = 2400 - 13n, \\ y &= y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n = -6600 + 36n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

För $n = 184$ får vi den enda lösningen med både x och y positiva, nämligen $x = 8$, $y = 24$. Det finns fyra lösningar med $|x| + |y| < 100$, svarande mot $n = 182, 183, 184, 185$. Dessa är, respektivt,

$$(34, -48), \quad (21, -12), \quad (8, 24), \quad (-5, 60).$$

5. (a) Först notera att

$$3^{-1} \equiv 2 \pmod 5, \quad 4^{-1} \equiv 2 \pmod 7, \quad 5^{-1} \equiv 5 \pmod 8.$$

Det innebär att kongruenserna kan skrivas om till den enklare formen

$$x \equiv 2 \pmod 5, \quad x \equiv 2 \cdot 2 \equiv 4 \pmod 7, \quad x \equiv 5 \cdot 3 \equiv 7 \pmod 8.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$x \equiv 2 \cdot b_1 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot b_2 \cdot 5 \cdot 8 + 7 \cdot b_3 \cdot 5 \cdot 7 \pmod{5 \cdot 7 \cdot 8}, \tag{4}$$

där

$$\begin{aligned} 7 \cdot 8 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod 5 &\Rightarrow 56b_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_1 = 1, \\ 5 \cdot 8 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow 40b_2 \equiv 1 &\Rightarrow 5b_2 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_2 = 3, \\ 5 \cdot 7 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod 8 \Rightarrow 35b_3 \equiv 1 &\Rightarrow 3b_3 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_1 = 3. \end{aligned}$$

Insättning in i (4) ger

$$\begin{aligned} x &\equiv 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 7 \pmod{240} \equiv \\ &\equiv 112 + 480 + 735 \equiv 1327 = 4 \cdot 280 + 207 \equiv 207 \pmod{280}, \end{aligned}$$

så den allmänna lösningen är $x \equiv 207 \pmod{280}$ och den minsta positiva lösningen är tydligen $x = 207$.

(b) Alla kongruenser är modulo 13. Notera först att $31 \equiv 5$. Då kan vi räkna

$$5^1 \equiv 5, \quad 5^2 = 25 \equiv -1, \quad 5^3 \equiv -5 \equiv 8, \quad 5^4 \equiv (-1)^2 \equiv 1.$$

Det följer för godtyckligt $n \in \mathbb{Z}$ att $5^n \equiv 5^{n (\mathrm{mod}\ 4)}$ och i synnerhet att $5^n \equiv 1$ om och endast om n är en multipel av 4.

6. (a) 7^{20}.

(b) $\binom{20+7-1}{7-1} = \binom{26}{6}$.

(c) $\binom{20}{5} \times \binom{15}{6}$.

(d) $\binom{20}{2} \times 3^2 \times 4^{18} + \binom{20}{1} \times 3^1 \times 4^{19} + \binom{20}{0} \times 3^0 \times 4^{20} = 4^{18}(190 \times 9 + 20 \times 3 \times 4 + 16) = 1966 \times 4^{18}$.

(e) Första händelsen är mer sannolik. Av symmetriskäl så är sannolikheten för första händelsen strängt större än $\frac{1}{2}$ (det finns en nollskild sannolikhet att medelvärdet är *exakt* 21 grader). Sannolikheten för den andra händelsen är $\left(\frac{6}{7}\right)^{20}$. Man behöver inte beräkna detta exakt för att inse att det är betydligt mindre än $\frac{1}{2}$.

7. (a) i. T.ex.

$$a \to c \to b \to e \to h \to k \to l \to j \to i \to g \to f \to d \to a.$$

ii. Det finns fyra noder av udda grad, nämligen a, h, k, l. Det gäller att förbinda ett par av dessa som inte redan är förbindade, t.ex. lägg till kanten $\{h, l\}$. Då får vi en graf där bara a och k har udda grad. Det finns således en Eulerväg mellan dessa. T.ex.

$$a \to b \to c \to a \to d \to f \to b \to g \to f \to i \to g \to$$
$$\to h \to b \to e \to h \to j \to i \to l \to h \to k \to l \to j \to k.$$

(b) i.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

ii. Elementet i M^4 är antalet vägar av längd 4 mellan noder 1 och 3. Antalet sådana vägar är $2^3 = 8$ eftersom
- vi har två val för första steget
- oavsett första steget har vi två val för andra steget
- oavsett första och andra stegen har vi två val för tredje steget
- oavsett tidigare steg har vi bara ett val för sista steget för vi måste hamna i nod 3.

Elementet i M^{16} är antalet vägar av längd 16 mellan noder 1 och 2. Det finns inga sådana vägar alls ty om vi börjar i nod 1 så måste vi efter ett jämnt antal steg hamna i antingen nod 1 eller nod 3.

8. (a) Först har vi $a_3 = \frac{a_2 + a_0}{a_1} \Rightarrow 3 = \frac{a_2+1}{2} \Rightarrow a_2 = 5$. Så talföljden börjar 1, 2, 5, 3. Man kan sedan lätt kontrollera att dessa fyra tal upprepar sig, vilket innebär, eftersom $2018 \equiv 2 \pmod 4$, att $a_{2018} = a_2 = 5$.

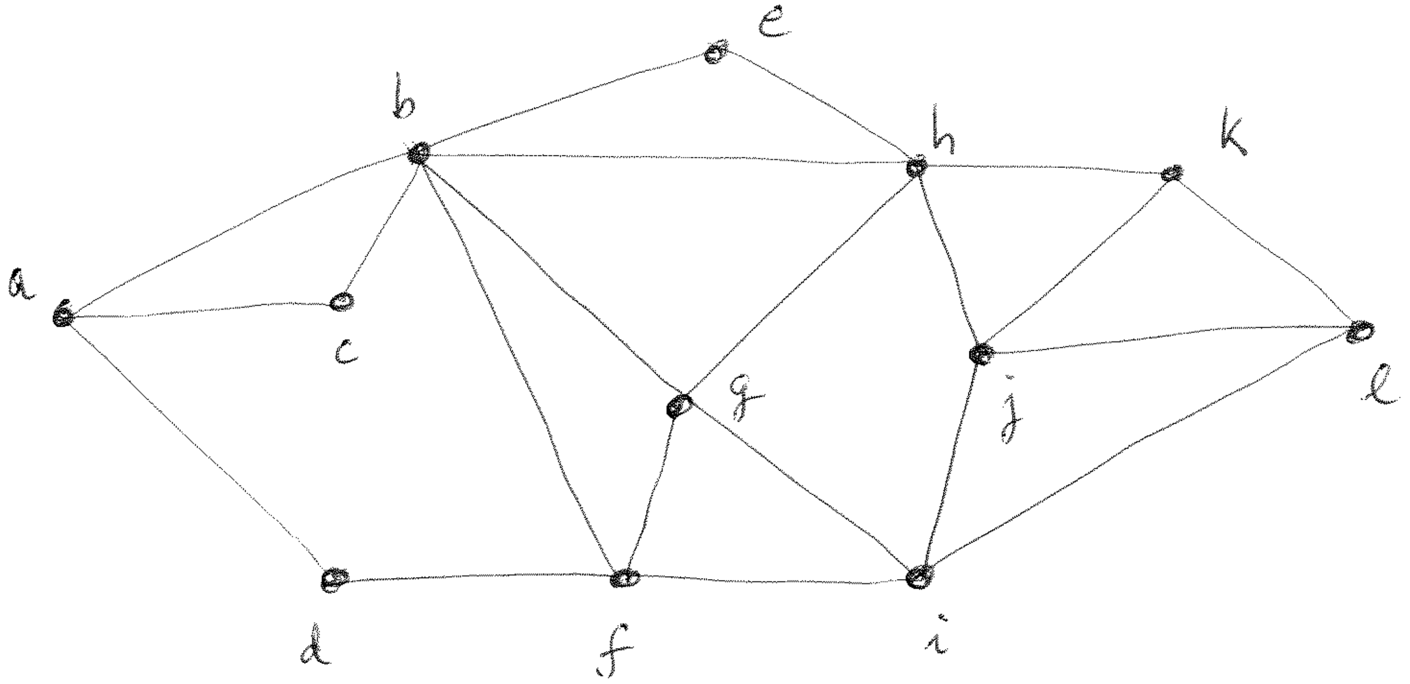
(b) Då talet n skrivs som en summa av k st positiva heltal, finns det följande två alternativ:

Fall 1: Någon summand är en etta. Tar vi bort den (finns det flera ettor så tar vi bort en av dem - det spelar ingen roll vilken ty man har inte hänsyn till ordning) så har vi skrivit $n-1$ som en summa av $k-1$ st positiva heltal. Antalet skrivsätt i Fall 1 är således $p(n-1, k-1)$.

Fall 2: Ingen summand är en etta, dvs varje term är minst två. Om vi drar bort ett från varje summand har vi fortfarande k st *positiva* heltal och deras summa är $n-k$. Antalet skrivsätt i Fall 2 är således $p(n-k,\ k)$.

Lägger vi ihop de två fallen (additionsprincipen) så har vi bevisat att $p(n,\ k) = p(n-1,\ k-1) + p(n-k,\ k)$.

Figur 1



Figur 2