Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DT2-3

2017-08-25 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Zuzana Nedelkova (alt. Peter Hegarty), telefon: 0317725325 (alt. 0766377873)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 22 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2016. Preliminärt så krävs 32 poäng för betyget 4 och 42 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 15 september. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.

Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. I uppgift 5 behöver man inte räkna ut svaren som decimaltal.

Uppgifterna

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej. (3p)

$$\begin{array}{r} p \wedge q \to r \\ \neg(\neg q \vee s) \\ r \to s \\ \hline \neg p \end{array}$$

(b) Låt universumet vara $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ och P vara predikatet (4p)

$$P(x, y, z):\ x^2 + y^2 \le z^2.$$

Avgör vilka av följande påståendena är sanna. Om du hävdar att ett påstående är falskt, ge ett motexempel. Om du hävdar att det är sant, ge en förklaring.

$\forall x \forall y \exists z\, P(x, y, z)$.
$\forall x \forall z \exists y\, P(x, y, z)$.
$\exists x \exists y \forall z\, P(x, y, z)$.
$\exists x \exists z \forall y\, P(x, y, z)$.

2. Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt enligt följande regel:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 \ \forall n \ge 3.$$

(a) Räkna ut a_3, a_4, a_5 för hand. (1.5p)

(b) Du borde nu kunna gissa en allmän formel för a_n. Ange och bevisa (via induktion eller på något annat vis) en sådan formel. (4.5p)

(c) Om man i stället hade satt $a_2 = c$, där $c \in \mathbb{R}_+$, vad hade den allmänna formeln för a_n blivit ? (Obs! Rätt svar räcker, ingen motivering behövs.) (1p)

Var god vänd!

3. (a) Ange den allmänna lösningen till kongruensen (4p)

$$19x \equiv 4 \,(\text{mod } 357),$$

samt ange den minsta positiva lösningen.

(b) Hur många av talen i $\{1, 2, \ldots, 356\}$ har en multiplikativ invers modulo 357 ? Skriv ner alla talen upp till och inklusive 20 som har det. (3p)

4. (a) Bestäm alla heltal samt det minsta positiva heltalet som uppfyller (5p)

$$x \equiv\ 8 \text{ (mod 7)}, \quad 2x \equiv 13 \text{ (mod 9)}, \quad 3x \equiv 14 \text{ (mod 10)}.$$

(b) Systemet (2p)

$$x \equiv\ 8 \text{ (mod 7)}, \quad 3x \equiv 13 \text{ (mod 9)}, \quad 2x \equiv 14 \text{ (mod 10)}$$

har däremot inga lösningar. Förklara varför.

5. I VM-finalen på 100m för damer nyligen fanns det 8 löpare, varav 2 från USA, 2 från CIV, 2 från TRI, 1 från NED och 1 från JAM.

(a) Hur många möjligheter finns det för resultatlistan 1-8 ? (1p)

(b) Hur många möjligheter finns det om vi bara betraktar nationstillhörighet ? (2p)

(c) Hur många möjligheter finns det om vi bara betraktar nationstillhörighet och vi vet att de fyra löparna från USA och CIV ockuperade platserna 1-4 ? (2p)

(d) Hur många möjligheter finns det om vi tar hänsyn till individen, som i (a), och vet att både USA och CIV fixade minst en medalj var ? (3p)

6. (a) En graf kallas för ett *träd* om den är .... och har inga ...... Fyll i de rätta orden ! (1p)

(b) Rita alla parvis icke-isomorfa (icke-märkta) träd med 6 noder. (3p)

(c) Rita multigrafen med följande grannmatris. Döpa noderna $1-7$, i den ordning du vill, och ange en Eulerväg i din graf. (4p)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Bestäm med bevis det minsta positiva heltalet n_0 så att den Diofantiska ekvationen $5x + 7y = n$ har en lösning där $x \geq 0$ och $y \geq 0$, för varje $n \geq n_0$. (6p)

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DT2-3, 170825

1. (a) Argumentet är giltigt. Antag att slutsatsen är falsk. Då är p sann. H2 kan skrivas om: $\neg(\neg q \vee s) = \neg(\neg q) \wedge \neg s = q \wedge \neg s$. Så q är sann och s falsk. Nu har vi både p och q sanna, så r måste också vara sann enligt H1. Men nu har vi r sann och s falsk, som säger emot H3.

(b) i. Detta är sant. Givet valfria $x, y \in \mathbb{N}_0$ så kan man alltid hitta z, tillräckligt stort, sådant att $z^2 \geq x^2 + y^2$.

ii. Detta är falskt. Om $x > z$ så finns det inget $y \in \mathbb{N}_0$ sådant att $x^2 + y^2 \leq z^2$.

iii. Detta är sant: tag $x = y = 0$.

iv. Detta är falskt. Oavsett valet av x och z så kommer $x^2 + y^2 > z^2$ att gälla för alla tillräckligt stora $y \in \mathbb{N}_0$.

2. (a) Insättning i rekursionen ger i tur och ordning:

$$\begin{aligned} n = 3: &\quad a_3 a_1 = a_2^2 \Rightarrow 1 \cdot a_3 = 2^2 \Rightarrow a_3 = 4, \\ n = 4: &\quad a_4 a_2 = a_3^2 \Rightarrow 2 \cdot a_4 = 4^2 \Rightarrow a_4 = 8, \\ n = 5: &\quad a_5 a_3 = a_4^2 \Rightarrow 4 \cdot a_5 = 8^2 \Rightarrow a_5 = 16. \end{aligned}$$

(b) Den uppenbara gissningen är att $a_n = 2^{n-1}$ för alla $n \geq 1$.

Steg 1: Basfallen $n = 1, 2$ kontrolleras direkt.

Steg 2: Stark induktion. Låt $n \geq 3$ och antag att

$$a_k = 2^{k-1} \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Med hjälp av detta antagande och rekursionen härleder vi att

$$a_n = \frac{a_{n-1}^2}{a_{n-2}} = \frac{(2^{n-2})^2}{2^{n-3}} = \frac{2^{2n-4}}{2^{n-3}} = 2^{2n-4-(n-3)} = 2^{n-1}, \quad \text{v.s.v.}$$

(c) $a_n = c^{n-1}$ för alla $n \geq 1$.

3. (a) Vi kör Euklides algoritm på (357, 19). Först framåt:

$$\begin{aligned} 357 &= 18 \cdot 19 + 15, \\ 19 &= 1 \cdot 15 + 4, \\ 15 &= 3 \cdot 4 + 3, \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1. \end{aligned}$$

I detta läge vet vi att SGD(357, 19) = 1 och eftersom 1 delar 4, så har kongruensen en lösning. Bakåt nu för att hitta inversen till 19 modulo 357:

$$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (15 - 3 \cdot 4) \\ &= 4 \cdot 4 - 15 \\ &= 4(19 - 15) - 15 \\ &= 4 \cdot 19 - 5 \cdot 15 \\ &= 4 \cdot 19 - 5(357 - 18 \cdot 19) \\ &= 94 \cdot 19 - 5 \cdot 357. \end{aligned}$$

Detta innebär att $19^{-1} \equiv 94 \pmod{357}$. Lösningen till kongruensen ges således av

$$x \equiv 4 \cdot 19^{-1} \equiv 4 \cdot 94 \equiv 376 \equiv 19 \pmod{357}.$$

Så den allmänna lösningen är $x \equiv 19 \pmod{357}$ och den minsta positiva lösningen är $x = 19$.

(b) Vi söker $\phi(357) = \phi(3 \cdot 7 \cdot 17) = (3-1)(7-1)(17-1) = 2 \cdot 6 \cdot 16 = 192$. Så det finns 192 sådana tal. Upp till 20 så är följande tal varken delbara med 3, 7 eller 17, och således relativt prima med 357:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 19, 20.$$

4. (a) Först låt oss skriva om kongruenserna till en enklare form:

$$\begin{aligned} x \equiv 8 \pmod 7 &\Rightarrow x \equiv 1 \pmod 7, \\ 2x \equiv 13 \equiv 4 \pmod 9 &\Rightarrow x \equiv 2 \pmod 9, \\ 3x \equiv 14 \equiv 4 \pmod{10} &\Rightarrow x \equiv 3^{-1} \cdot 4 \equiv 7 \cdot 4 \equiv -2 \pmod{10}. \end{aligned}$$

Så enligt den Kinsesiska Rest Satsen, den allmänna lösningen till systemet är

$$x \equiv 1 \cdot b_1 \cdot 9 \cdot 10 + 2 \cdot b_2 \cdot 7 \cdot 10 - 2 \cdot b_3 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{7 \cdot 9 \cdot 10}, \tag{1}$$

där

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod 7 &\Rightarrow -b_1 \equiv 1 \pmod 7 \Rightarrow \text{tag } b_1 = -1, \\ 7 \cdot 10 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod 9 &\Rightarrow -2b_2 \equiv 1 \pmod 9 \Rightarrow \text{tag } b_2 = 4, \\ 7 \cdot 9 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod{10} &\Rightarrow 3b_3 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow \text{tag } b_3 = 7. \end{aligned}$$

Insättning in i (1) ger

$$\begin{aligned} x \equiv (-1) \cdot 1 \cdot 9 \cdot 10 + 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 - 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \pmod{630} \equiv \\ \equiv -90 + 560 - 882 \equiv -412 \equiv 218 \pmod{630}. \end{aligned}$$

Det minsta positiva talet som uppfyller detta är naturligtvis $x = 218$.

(b) Problemet ligger i den mittersta kongruensen: $3x \equiv 13 \pmod 9$. Den har ingen lösning ty SGD(3, 9) = 3 och 3 delar inte 13.

5. (a) $8! = 40320$.

(b) $\frac{8!}{(2!)^3} = 5040$.

(c) Resultatlistan bestäms entydigt om man
- väljer vilka 2 av de 4 första platersna som ockuperades av USA
- väljer vilka 2 av de 4 sista platserna som ockuperades av TRI
- väljer vilken av NED och JAM som hamnade högre i listan.

Antalet möjligheter är alltså, enligt multiplikationsprincipen, $\binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times 2 = 6 \times 6 \times 2 = 72$.

(d) Vi räknar ihop följande tre fall:

Fall 1: Både USA och CIV fick en medalj var.

Fall 2: USA fick 2 nedaljer och CIV en.

Fall 3: CIV fick 2 medaljer och USA en.

Notera av symmetriskäl att det är samma antal möjligheter i Fall 2 och 3.

Fall 1: Vi har 3 val för USAs valör, sedan 2 val för CIVs. Vi har 2 val för individen i båda dessa fall. För den sista medaljen har vi sedan 4 val för individen, ty det kan inte vara den andra CIV aller USA löparen. Sedan kan de återstående 5 platserna fördelas valfritt.

Det totala antalet möjligheter är således: $(3 \times 2) \times (2 \times 2) \times 4 \times 5! = 10520$.

Fall 2: Vi har 3×2 val för hur de två USA löparna ska placeras, sedan 2 val för identiteten hos den 3e medaljören, som måste komma från CIV. De 5 icke-medaljörerna kan slutligen ordnas valfritt.

Det totala antalet möjligheter är således: $(3 \times 2) \times 2 \times 5! = 1440$.

Sammanlagt finns det alltså $10520 + 2 \times 1440 = 13400$ möjligheter.

6. (a) Orden är *sammanhängande* och *cykler*.

(b) Se Figur L.1.

(c) Se Figur L.2. En Eulerväg måste gå mellan noderna jag har döpt 2 och 7, ty endast dessa har udda gradtal. Ett exempel på en Eulerväg från 2 till 7 är

$$2 \to 7 \to 1 \to 7 \to 1 \to 6 \to 2 \to 5 \to 4 \to 3 \to 5 \to 6 \to 3 \to 6 \to 7.$$

7. Låt

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : \exists\, x,\, y \in \mathbb{N}_0 \text{ sådana att } 5x + 7y = n\}.$$

Vi söker det minsta talet n_0 sådant att $n \in S\ \forall n \geq n_0$. Jag hävdar att $n_0 = 24$.

Steg 1: $n_0 \geq 24$, ty $23 \notin S$, något som kan kontrolleras direkt.

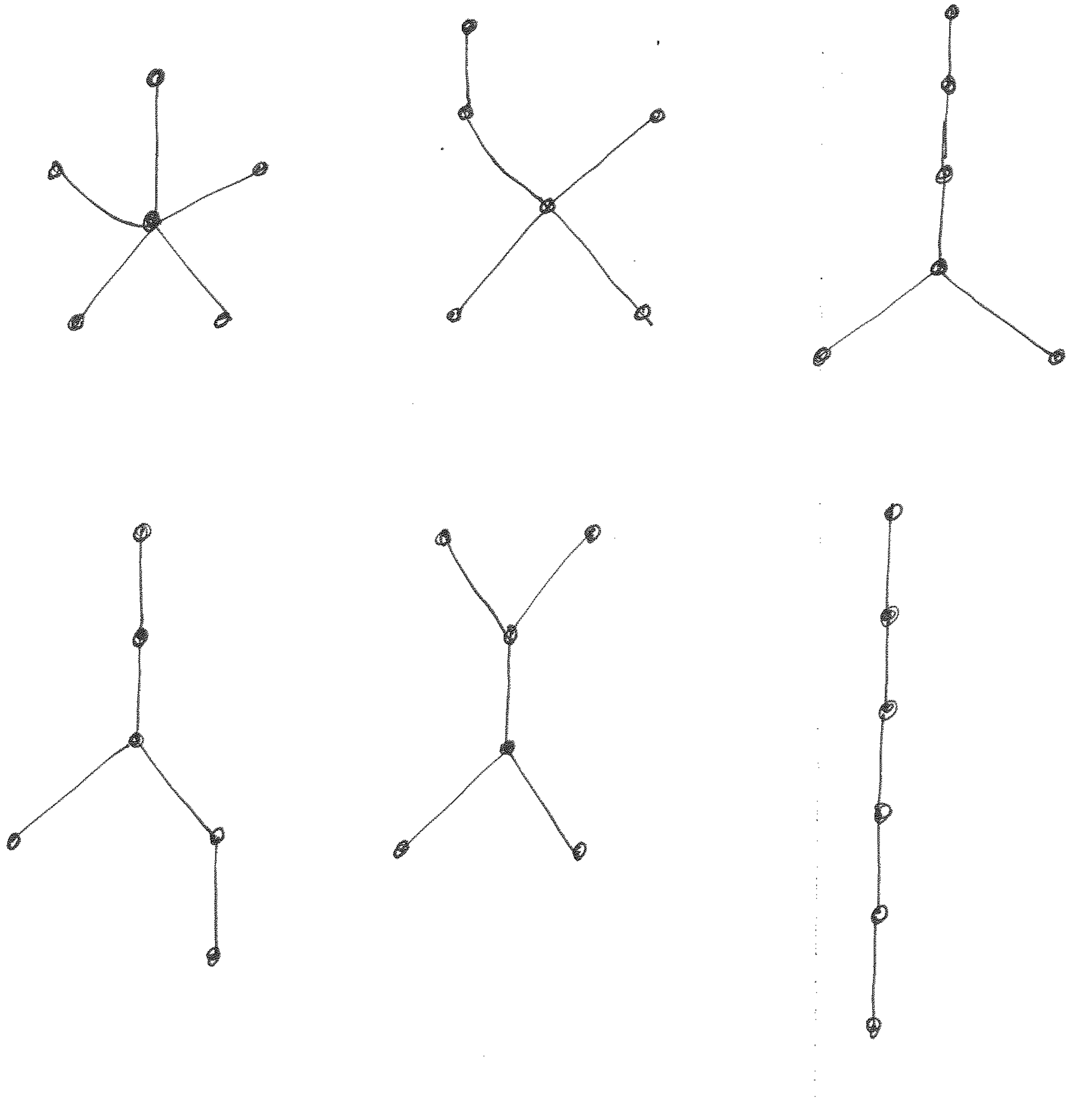
Steg 2: Notera först att

$$\begin{aligned}
5 \cdot 2 + 7 \cdot 2 &= 24, \\
5 \cdot 5 + 7 \cdot 0 &= 25, \\
5 \cdot 1 + 7 \cdot 3 &= 26, \\
5 \cdot 4 + 7 \cdot 1 &= 27, \\
5 \cdot 0 + 7 \cdot 4 &= 28.
\end{aligned}$$

Så här har vi fem efterföljande tal, varav det första är 24, som alla tillhör S. Men om $n \in S$ så är $n + 5 \in S$, ty om $5x + 7y = n$ så är $5(x + 1) + 7y = n + 5$. Detta innebär att, så snart vi har fem efterföljande tal i S, så är *alla* efterföljande tal i S. Så beviset är klart.

Figur L.1

Det finns 6 sådana träd



Figur L. 2