TMV206 Linjär Algebra, våren 2022
Lösningsförslag

Fråga 1. **(a)** Lös ekvationssystemet (2p)

$$\begin{cases} 2x - y - 3w & = 1, \\ -x - z - w & = 2. \end{cases}$$

(b) Låt

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Visa att ekvationssystemet $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ saknar lösningar. (2p)

(c) Låt A och $\mathbf{b}$ vara samma som i (b). Hitta $\mathbf{x}$ så att $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$ är minimal. (3p)

Lösning. **(a)** Vi kan skriva om ekvationssystemet såsom:

$$\begin{cases} -x - z - w & = 2 \\ 2x - y - 3w & = 1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + z + w & = -2 \\ -y - 2z - 5w & = 5 \end{cases}$$

Om vi nu låter $z = s$ och $w = t$ så ges lösningarna av

$$\begin{cases} x & = -2 - s - t \\ y & = -5 - 2s - 5t \\ z & = s \\ w & = t \end{cases}$$

där s och t är reella tal.

(b) Vi utför Gausselimination på totalmatrisen $(A\ \mathbf{b})$ för ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Vi har fått ett pivotelement i sista kolumnen. Det betyder att lösningar saknas.

(c) För att lösa denna uppgift ska vi lösa ekvationssystemet $A^t A\mathbf{x} = A^t\mathbf{b}$. Vi beräknar:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad A^t\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 \\ 20 \end{pmatrix}$$

och sedan reducerar vi ekvationssystemet:

$$\begin{pmatrix} 18 & 8 & 46 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 4 & 23 \\ 8 & 11 & 20 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 72 & 32 & 184 \\ 72 & 99 & 180 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 9 & 4 & 23 \\ 0 & 67 & -4 \end{pmatrix}$$

vilket ger

$$x_2 = -\frac{4}{67} \quad \text{och} \quad x_1 = \frac{23}{9} - \frac{4}{9}x_2 = \frac{23}{9} + \frac{4}{9}\frac{4}{67} = \frac{23 \cdot 67 + 4 \cdot 4}{9 \cdot 67} = \frac{173}{67}.$$

Detta betyder att $\mathbf{x} = \frac{1}{67}(173, -4)$.

Fråga 2. Låt $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ och $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$. Låt Π vara det plan i $\mathbf{R}^3$ som går genom origo och som innehåller vektorerna $\mathbf{u}$ och $\mathbf{v}$.

(a) Låt avbildningen $S : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara ortogonal projektion på planet Π. Beräkna matrisen för den linjära avbildningen S (i standardbasen). (3p)

(b) Låt N vara den linje som är normal till planet Π och som går genom origo. Låt avbildningen $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara ortogonal projektion på linjen N. Beräkna matrisen för den linjära avbildningen T (i standardbasen). (3p)

(c) Vad är $S + T$ för linjär avbildning? (1p)

Lösning. **(a)** En normal till planet Π ges av $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = (1, -2, 1)$. Den ortogonala projektionen av en vektor $\mathbf{w}$ på planet ges av $\mathbf{w}_\Pi = \mathbf{w} - \mathbf{w}_N$. Här är $\mathbf{w}_N$ den ortogonala projektionen på linjen som spänns av $\mathbf{n}$. För att beräkna matrisen av avbildningen S räcker det att låta $\mathbf{w}$ vara $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ och $\mathbf{e}_z$. Vi beräknar:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_x)_\Pi &= \mathbf{e}_x - (\mathbf{e}_x)_N = \mathbf{e}_x - \frac{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \mathbf{e}_x - \frac{1}{6}\mathbf{n} \\
(\mathbf{e}_y)_\Pi &= \mathbf{e}_y - (\mathbf{e}_y)_N = \mathbf{e}_y - \frac{\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \mathbf{e}_y + \frac{2}{6}\mathbf{n} \\
(\mathbf{e}_z)_\Pi &= \mathbf{e}_z - (\mathbf{e}_z)_N = \mathbf{e}_z - \frac{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}}\mathbf{n} = \mathbf{e}_z + \frac{1}{6}\mathbf{n}
\end{aligned}$$

Vi får att matrisen till avbildningen S ges av

$$M_S = \big((\mathbf{e}_x)_\Pi \quad (\mathbf{e}_y)_\Pi \quad (\mathbf{e}_z)_\Pi\big) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) Vi har beräknat denna ortogonala projektion i (a). Matrisen ges av

$$M_T = \big((\mathbf{e}_x)_N \quad (\mathbf{e}_y)_N \quad (\mathbf{e}_z)_N\big) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(c) Eftersom $M_S + M_T = I$ så är $S + T$ identitetsavbildningen.

Fråga 3. Låt

$$B = \begin{pmatrix} -19 & 7 & -12 & -16 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 30 & -10 & 14 & 27 \\ 23 & -12 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

Beräkna $\det(B^2)$. (4p)

Lösning. Det är en dålig idé att beräkna B^2. Istället använder vi att $\det(B^2) = \det(B)^2$ och beräknar $\det(B)$:

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} -19 & 7 & -12 & -16 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 30 & -10 & 14 & 27 \\ 23 & -12 & 12 & 20 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -19 & 7 & -12 & -16 \\ 30 & -10 & 14 & 27 \\ 23 & -12 & 12 & 20 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & -12 & -12 & 3 \\ 30 & 20 & 14 & -3 \\ 23 & 11 & 12 & -3 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 20 & 14 & -3 \\ 11 & 12 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= -\det \begin{pmatrix} -12 & -12 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3\Big(8 \cdot 0 - 2 \cdot (-1)\Big) = -6.$$

Alltså är $\det(B^2) = (-6)^2 = 36$.

Fråga 4. Låt G vara en riktad graf med följande grannmatris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Rita grafen G. (1p)

(b) Är grafen G svagt sammanhängande? (2p)

(c) Är grafen G starkt sammanhängande? (3p)

Lösning. (a). Vi skippar att rita grafen här.

(b). Vi beräknar grannmatrisen till den underliggande oriktade grafen och betecknar den med B:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

och detta betyder att det finns vägar av längd två mellan varje par av noder. Alltså är grafen G svagt sammanhängande.

(c). Vi beräknar A^2 och A^3 och summerar $A + A^2 + A^3$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom det är nollskilda element på varje plats går det att ta sig från varje nod till varje nod med en väg av längd högst 3. Därför är grafen starkt sammanhängande.

Fråga 5. Låt

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{f}_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

vara fyra vektorer i $\mathbf{R}^4$. Vektorerna $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ utgör en bas för $\mathbf{R}^4$ som vi betecknar F. (Du behöver inte visa att F är en bas.)

(a) Vad betyder det att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är linjärt oberoende? (Du ska alltså ge definitionen av linjärt oberoende men specifikt för dessa vektorer. Du behöver inte visa att vektorerna är linjärt oberoende.) (1p)

(b) Låt $L : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ vara den linjära avbildning som i standardbasen ges av matrisen

$$A_E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestäm matrisen för L i basen F. (5p)

Lösning. **(a)** Att $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3, \mathbf{f}_4$ är linjärt oberoende betyder att för alla reella tal c_1, c_2, c_3, c_4 gäller att

$$c_1\mathbf{f}_1 + c_2\mathbf{f}_2 + c_3\mathbf{f}_3 + c_4\mathbf{f}_4 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0.$$

(b) Matrisen ges av $A_F = F^{-1}A_EF$ där

$$F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen F är en ON-matris så får vi att $F^{-1} = F^t = F$. Vi får att

$$A_F = FA_EF = \frac{1}{2}F\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Fråga 6. Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

har en egenvektor $\mathbf{v} = (2, 1, -1)$. Hitta alla egenvärden och egenvektorer till A. (6p)

Lösning. Vi beräknar det karakteristiska polynomet till A:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & 5 & 1 \\ -2 & 4-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\Big((-3-\lambda)(4-\lambda)+10\Big) = -(\lambda+1)\big(\lambda^2-\lambda-2\big)$$

Nollställena till $p(\lambda)$ ges av $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$ (lös andragradsekvationen). Alltså är egenvärdena $\lambda = -1$ och $\lambda = 2$. Vi beräknar egenvektorer till $\lambda = -1$ genom att lösa ekvationssystemet $(A - (-1)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får två fria kolumner så vi låter $x_2 = 2s$ och $x_3 = 2t$. I så fall blir $x_1 = 5s + t$. Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = -1$ ges alltså av

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vi beräknar egenvektorer till $\lambda = 2$ genom att lösa ekvationssystemet $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -5 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi får en fri kolumn så vi låter $x_2 = s$. I så fall blir $x_3 = 0$ och $x_1 = s$. Egenvektorer till egenvärdet $\lambda = 2$ ges alltså av

$$\mathbf{x} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(En bas av egenvektorer ges av $\mathbf{v}_1 = (5, 2, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, 2), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 0)$. Linjärkombinationer av $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är också egenvektorer (med egenvärde -1) men linjärkombinationer där även $\mathbf{v}_3$ ingår är inte egenvektorer. Våran lösning använder inte vektorn $\mathbf{v}$ som vi fick i frågan men om man beräknar det karakteristiska polynomet på ett annat sätt behöver man hitta en rot och man kan använda $\mathbf{v}$ för att göra det. Hur hittar vi vektorn $\mathbf{v}$ i våran lösning? I beskrivningen av egenvektorerna för $\lambda = -1$ låter vi $s = 1/2$ och $t = -1/2$.)

Fråga 7. Låt ϕ vara en vinkel (i radianer) med $0 < \phi < \pi$. Låt den linjära avbildningen $R : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ vara rotation med ϕ radianer moturs omkring origo. Visa att R *inte* är diagonaliserbar. (6p)

Lösning. Matrisen för rotationen ges av

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Det karakteristiska polynomet till R ges av

$$p(\lambda) = \det(R - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \cos(\phi) - \lambda & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) - \lambda \end{pmatrix} = (\cos(\phi) - \lambda)^2 + \sin^2(\phi)$$
$$= \lambda^2 + 2\cos(\phi)\lambda + 1 = (\lambda + \cos(\phi))^2 + 1 - \cos^2(\phi).$$

Ett reellt tal λ är ett egenvärde om och endast om $p(\lambda) = 0$. Detta ger

$$(\lambda + \cos(\phi))^2 = \cos^2(\phi) - 1$$

Men eftersom vi har antagit att $0 < \phi < \pi$ så är $\cos^2(\phi) - 1 < 0$. Därför kan det inte finnas några reella lösningar till $p(\lambda) = 0$. Alltså finns inga egenvärden och inga egenvektorer. Då kan inte R vara diagonaliserbar. (Kom ihåg att R är diagonaliserbar om och endast om det finns en bas av egenvektorer.)

Fråga 8. Betrakta följande Matlab-funktioner:

```
function v=funktion1(A,b)
        v=A\b;
end

function v=funktion2(A,b)
        v=inv(A)*b;
end

function v=funktion3(A,b)
        [m,n] = size(A);
        B= zeros(n,m);
        for k=1:m
                e=zeros(m,1);
                e(k)=1;
                B(:,k)=A\e;
        end
        v= B*b;
end
```

(a) Vad händer om man anropar funktionerna med en inverterbar $n \times n$-matris A och någon n-vektor $\mathbf{b}$? Vad beräknar funktionerna? Motivera varför. (2p)

(b) Vad händer om man anropar funktionerna med en $m \times n$-matris A och någon m-vektor $\mathbf{b}$? Motivera vad de beräknar eller varför de kommer att ge felmeddelanden. (3p)

Lösning. **(a)**

(b)