MATEMATIK
Chalmers Tekniska Högskola
Tentamen i Linjär algebra IT, TMV206, 2021-03-19.
Hjälpmedel: Alla. Det är dock inte tillåtet att kommunicera med någon annan person på något sätt.
Examinator: Stefan Lemurell, 073-143 1168.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är beräkningarna och motiveringarna som ger poäng inte svaret.
För betyget 3 krävs minst 23 poäng sammanlagt, för 4 krävs 33 poäng och för 5 krävs 43 poäng inklusive bonuspoäng.

---

1. Bestäm alla värden på k för vilka ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + ky = 1 \\ kx + y = 1 \end{cases}$$

   (a) inte har någon lösning.
   (b) har oändligt många lösningar.
   (c) har en unik lösning.

   I de fall då det finns lösning(ar) ska du också ange samtliga dessa. (6p)

2. Avbildningen $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ uppfyller att

$$f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0},\ f\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0} \text{ och } f\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-3\\6\\2\\5\end{pmatrix}$$

   Kan f vara en linjär avbildning? (4p)

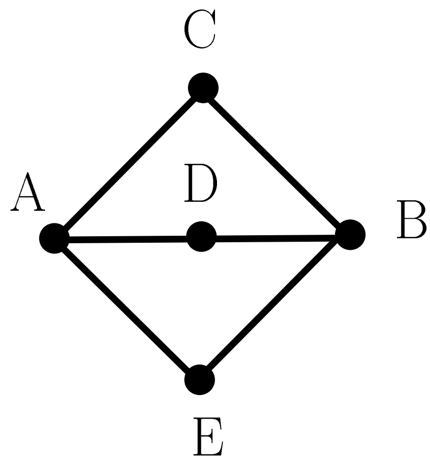
3. Bestäm alla reella tal k sådana att vektorerna $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ är linjärt beroende om

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix},\ \mathbf{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{w} = \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

   (6p)

Var god vänd!

4. Låt $G = (V, E)$ vara grafen i figur 1.



Figur 1: Grafen $G = (V, E)$.

(a) Bestäm grannmatrisen till G.

(b) Använd matrisalgebra för att avgöra om det finns cykler av längd 3 som startar i B och eller i C.

(c) Är G tvådelad? Motivera ditt svar.

(6p)

5. Låt $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ och $g(\mathbf{x}) = C\mathbf{x} + \mathbf{d}$ vara affina avbildningar med

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \; \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Beräkna sammansättningen $f \circ g$.

(b) Bestäm bilden av

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

under avbildningen $f \circ g$.

(6p)

Var god vänd!

6. Låt $P = (1,1,1)$, $Q = (2,1,1)$ och $R = (8,2,1)$.
   (a) Bestäm arean av triangeln $\triangle PQR$.
   (b) Låt f vara den linjära avbildning som har matrisen
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$
   i standardbasen. Vad är arean av bilden $f(\triangle PQR)$ av triangeln $\triangle PQR$?

(6p)

7. Låt Π vara planet genom origo som innehåller vektorerna
$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ och } \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Bestäm en ekvation på normalform för Π.
   (b) Bestäm en ON-bas P för $\mathbb{R}^3$ där de första två basvektorerna ligger i Π.
   (c) Låt $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vara den linjära avbildning som ges av spegling i planet Π. Bestäm matrisen för f både i basen P och i standardbasen för $\mathbb{R}^3$.

(8p)

8. Vi säger att $n \times n$-matrisen A är konjugerad med $n \times n$-matrisen B om och endast om det finns en inverterbar matris P sådan att
$$A = PBP^{-1}.$$
Detta ger en relation på mängden av alla $n \times n$-matriser.
   (a) Visa att relationen 'konjugerad med' är en ekvivalensrelation på mängden av alla $n \times n$-matriser.
   (b) Visa att två matriser som är konjugerade med varandra har samma egenvärden.

(8p)

Tentorna beräknas vara färdigrättade den 9 april.

LYCKA TILL! Alice och Stefan.