MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TMV200/211 – Diskret matematik

Tentamen: 2023-01-04, 08.30–12.30
Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} q \to p \\ r \to (\neg p \vee \neg q) \\ \neg q \to \neg s \\ s \\ \hline \neg r \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (5p)

(b) Låt $P(x, y, z)$ vara predikatet $x \geq y - z$, definierat på mängden $\mathbb{Z}_+$ av positiva heltal (dvs definierat för $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$). Avgör om följande utsagor

$$\forall x \exists z \forall y : P(x, y, z)$$

$$\exists y \forall x \forall z : P(x, y, z)$$

$$\exists z \forall x \exists y : P(x, y, z)$$

är sanna eller falska. Endast svar krävs. (3p)

2. Visa att $3^n \geq 1 + n + n^2$ för alla heltal $n \geq 1$. (7p)

3. (a) Rita en sammanhängande bipartit graf med 6 noder som har en Eulercykel. Motivera varför grafen du ritat har en Eulercykel. (3p)

(b) Bevisa att en sammanhängande bipartit graf med 5 noder inte kan ha en Eulercykel. (3p)

Var god vänd!

4. Låt M vara mängden av alla delmängder till $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Definiera en relation $\sim$ på M genom $A \sim B$ om $A \cap B$ har ett udda antal element.

(a) Är $\sim$ reflexiv? Symmetrisk? Transitiv? (3p)

(b) Bestäm mängden

$$\{A \in M \mid A \sim \{1, 2\}\} \cap \{B \in M \mid B \sim \{1, 3\}\}.$$

(3p)

5. Låt $G = (V, E)$ vara en graf. Vi säger att tre (olika) noder $v_1, v_2, v_3 \in V$ bildar en *triangel* i G om $\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\} \in E$.

(a) Skriv påståendet "Alla bipartita grafer saknar trianglar" på predikatlogisk form. Glöm inte att definiera ett lämpligt universum. (3p)

(b) Låt n vara ett positivt heltal. Konstruera en graf med $2n$ noder och n^2 kanter som inte har någon triangel i sig. (4p)

6. (a) Primtalsfaktorisera 2023 och beräkna $\Phi(2023)$. (3p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 2 \quad (7) \\ x \equiv 1 \quad (9) \\ x \equiv 3 \quad (5). \end{cases}$$

(5p)

7. Svaren i den här uppgiften skall ges som explicita tal. Hur många fyrsiffriga tal finns det där ...

(a) exakt en siffra är jämn? (2p)

(b) minst två siffror skall vara primtal och minst två siffror skall vara udda? (3p)

(c) alla siffror är olika? (3p)

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag

1. (a) Argumentet är giltigt. Vi gör ett motsägelsebevis. Antag att hypoteserna är sanna och slutsatsen är falsk. Då är s sann enligt den fjärde hypotesen, så enligt den tredje hypotesen är q sann. Enligt den första hypotesen är då p sann. Om slutsatsen är falsk måste r vara sann. Men om r, q och p är sanna så är den andra hypotesen falsk, vilket är ett motsägelse.

(b) Den första utsagan är falsk (oavsett vad x och z är så kan vi välja ett y så att $x < y - z$). Den andra utsagan är sann (vi kan välja $y = 0$; då är $x \geq -z$ eftersom x och z är positiva). Den tredje utsagan är också sann (vi kan välja $z = 0$ – oavsett vad x är så kan vi välja y så $x \geq y$).

2. Vi visar påståendet med induktion. Vårt basfall är $n = 1$: Då är $3^n = 3^1 = 3$ och $1 + n + n^2 = 1 + 1 + 1^2 = 3$, så påståendet $3^n \geq 1 + n + n^2$ stämmer när $n = 1$.

Induktionssteget: Antag att $3^n \geq 1 + n + n^2$ för ett specifikt n (induktionsantagandet). Vi vill visa att $3^{n+1} \geq 1 + (n+1) + (n+1)^2$. Vi har

$$1 + (n+1) + (n+1)^2 = 3 + 3n + n^2 \leq 3 + 3n + 3n^2 = 3(1 + n + n^2) \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

där den första olikhet kommer av att $n^2 \leq 3n^2$ och den andra olikheten kommer från induktionsantagandet. Det avslutar induktionssteget och därmed hela induktionsbevis.

3. (a) Den fullständigt bipartita grafen $K_{2,4}$ med 2 blå noder och 4 röda noder är sammanhängande och bipartit, och har en Eulercykel eftersom alla gradtal är jämna.

(b) En bipartit graf med 5 noder har antingen 1 blå nod och 4 röda, eller 2 blå noder och 3 röda noder (eller vice versa). Det ger oss två fall att kontrollera:

Fall 1: Antag att vi har en blå nod och fyra röda. Varje röd nod kan endast ha en kant till sig (från den blå noden), och för att grafen skall vara sammanhängande måste den kanten finnas. Så alla röda noder har gradtal 1, vilket är udda, så grafen har ingen Eulercykel.

Fall 2: Antag nu att vi har två blå och tre röda noder. För att grafen skall vara sammanhängande och de röda noderna skall ha jämnt gradtal så måste varje röd nod ha kanter till bägge de två blå noderna. Men då är grafen fullständigt bipartit, och de blå noderna har gradtal 3, så grafen har ingen Eulercykel.

4. (a) $\sim$ är inte reflexiv: Låt exempelvis $A = \{1, 2\}$. Om $A \sim A$ så skall $A \cap A$ ha ett udda antal element, men $A \cap A = A = \{1, 2\}$, som har två element.

$\sim$ är symmetrisk: Om $A \sim B$ så har $A \cap B$ ett udda antal element, så eftersom $A \cap B = B \cap A$ så har $B \cap A$ ett udda antal element, så $B \sim A$.

$\sim$ är inte transitiv: Vi ger ett motexempel. Låt $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ och $C = \{3, 4\}$. Då är $A \cap B = \{2\}$ och $B \cap C = \{3\}$, så $A \sim B$ och $B \sim C$. Men $A \cap C = \emptyset$, vilket har ett jämnt antal element, så $A \not\sim C$.

(b) $A \sim \{1,2\}$ betyder att $A \cap \{1,2\}$ har ett udda antal element, vilket händer om $1 \in A$ eller $2 \in A$, men inte båda. På samma sätt betyder $B \sim \{1,3\}$ att $1inB$ eller $3 \in B$, men inte båda. Så vi får att $\{A \in M \mid A \sim \{1,2\}\} \cap \{B \in M \mid B \sim \{1,3\}\}$ är mängden $N \cup P$ där

$$N = \{A \subseteq \{1,4,5,6\} \mid 1 \in A\}$$

och

$$P = \{B \subseteq \{2,3,4,5,6\} \mid 2,3 \in B\}.$$

5. (a) Låt universum U vara mängden av alla grafer. Låt $B(x)$ vara predikatet "x är bipartit" och $T(x)$ predikatet "x har en triangel", bägge definierade på U. Då är påståendet

$$\forall x \in U : B(x) \to \neg T(x).$$

(b) Påståendet i (a) är sant (en bipartit graf har ingen triangel), så den fullständigt bipartita grafen $K_{n,n}$ med n blå noder och n röda noder är ett exempel på en graf med $2n$ noder, n^2 kanter och inga trianglar.

6. (a) Vi har $2023 = 7 \cdot 17^2$. Därmed är

$$\Phi(2023) = \Phi(7) \cdot \Phi(17^2) = (7-1)(17^2 - 17) = 6 \cdot 272 = 1632.$$

(b) Första ekvationen ger att $x = 2 + 7y$. Insättning i andra ekvationen ger $2 + 7y \equiv 1\ (9)$, vilket kan förenklas till $7y \equiv -1\ (9)$. Inversen till 7 modulo 9 är 4, så om vi multiplicerar ekvationen med 4 på bägge sidor får vi $y \equiv -4\ (9)$, dvs $y = -4 + 9z$ för något $z \in \mathbb{Z}$.

Vi får då $x = 2 + 7y = 2 + 7(-4 + 9y) = -26 + 63z$. Insättning i den tredje ekvationen ger $-26 + 63z \equiv 3\ (5)$, vilket vi kan förenkla till $3z \equiv 4\ (5)$. Inversen till 3 modulo 5 är 2, så om vi multiplicerar ekvationen med 2 på bägge sidor får vi $z \equiv 8\ (5)$, som vi kan förenkla till $z \equiv 3\ (5)$. Alltså har vi $z = 3 + 5n$ något $n \in \mathbb{Z}$, så lösningarna är

$$x = -26 + 63z = -26 + 63(3 + 5n) = 163 + 315n$$

för $n \in \mathbb{Z}$.

7. (a) Vi delar upp i två fall: Om första siffran är jämn eller inte. Om första siffran är jämn finns det 4 val för vilken det kan vara (2, 4, 6 eller 8, kan inte vara 0), och resterande tre siffror måste vara udda så det finns 5 olika möjligheter för var och en. Enligt multiplikationsprincipen får vi då

$$4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 600$$

olika tal. Om istället första siffran är udda så kan den väljas på 5 sätt. Vi har sedan tre val för vilken av de resterande siffrorna som skall vara jämn, 5 val för vilken jämn siffra det är, och $5 \cdot 5$ olika sätt att välja resterande två udda siffror. Det ger

$$5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 1875$$

olika tal. Totalt får vi $600 + 1875 = 2475$ olika tal.

(b) Vi delar upp i fall efter hur många udda primtal talet innehåller, plus hur många tvåor det innehåller, plus hur många udda icke-primtal det innehåller, plus hur många jämna icke-primtal det innehåller. Så nedan så betyder exempelvis 1+1+2+0 att talet innehåller ett udda primtal, en tvåa, och två udda icke-primtal. Notera att det finns 3 udda primtal (3, 5 och 7), 2 udda icke-primtal (1 och 9) samt 4 jämna icke-primtal (0, 4, 6 och 8). Med minst två udda tal och minst två primtal ger det oss följande fall (många fall har samma typ av argument, så motiveringerna för senare fall blir mer och mer kortfattade):

$\underline{0+2+2+0}$: Vi har $\binom{4}{2}$ sätt att sätta ut tvåorna, och sedan 2^2 sätt att välja resterande udda icke-primtal. Det ger $6 \cdot 4 = 24$ olika tal.

$\underline{1+1+1+1}$: Två fall: Om det jämna icke-primtalet är först kan det väljas på 3 sätt. Sen finns det 3 sätt att sätta ut tvåan, 2 platser för var det udda primtalet skall vara, 3 sätt att välja det, samt 2 sätt att välja det udda icke-primtalet. Det ger oss $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 108$ tal.

Om det jämna icke-primtalet inte är först kan vi sätta ut det på 3 olika positioner, vi har 4 val för vilken siffra det skall vara, sen finns det 3 sätt att sätta ut tvåan, 2 platser för var det udda primtalet skall vara, 3 sätt att välja det, samt 2 sätt att välja det udda icke-primtalet. Det ger oss $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 432$ tal. Totalt får vi då $108 + 432 = 540$ tal.

$\underline{1+1+2+0}$: 4 sätt att sätta ut tvåan, 3 sätta att sätta ut det udda primtalet, 3 val för vilket det skall vara, och 2^2 sätt att välja återstående två udda icke-primtal. Det ger $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2^2 = 144$ tal.

$\underline{1+2+1+0}$: Vi resonerar ungefär som i fallet $1+1+2+0$, det ger oss $6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ tal.

$\underline{2+0+0+2}$: Liknande $1+1+1+1$. Om ett av de jämna icke-primtalen står först kan vi välja det på 3 sätt, sen finns 3 val för var det andra jämna icke-primtalet skall vara, 4 val för det är, och till sist 3^2 val för de udda primtalet. Det ger $3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^2 = 324$ tal.

Om ett udda primtal står först istället får vi med ett liknande resonemang $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4^2 = 432$ tal. Totalt får vi $324 + 432 = 756$ tal.

$\underline{2+0+1+1}$: Återigen måste vi dela upp i två beroende på om det jämna icke-primtalet är först eller inte. Totalt får vi $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 810$ tal.

$\underline{2+0+2+0}$: Vi får $\binom{4}{2} \cdot 3^2 \cdot 2^2 = 216$ tal.

$\underline{2+1+0+1}$: Vi måste dela upp i två beroende på om det jämna icke-primtalet är först eller inte. Totalt får vi $3 \cdot 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3^2 = 405$ tal.

$\underline{2+1+1+0}$: Vi får $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3^2 = 216$ tal.

$\underline{2+2+0+0}$: Vi får $\binom{4}{2} \cdot 3^2 = 54$ tal.

$\underline{3+0+0+1}$: Vi måste dela upp i två beroende på om det jämna icke-primtalet är först eller inte. Totalt får vi $3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 4 \cdot 3^3 = 405$ tal.

$\underline{3+0+1+0}$: Vi får $4 \cdot 2 \cdot 3^3 = 216$ tal.

$\underline{3+1+0+0}$: Vi får $4 \cdot 3^3 = 108$ tal.

$\underline{4+0+0+0}$: Vi får $3^4 = 81$ tal.

Det ger samtliga fall (vissa fall skulle kunna behandlas tillsammans för en kortare lösning, men vi har valt att ändå separera dem för att ha en likformig fallindelning). Totalt får vi

$$24 + 540 + 144 + 72 + 756 + 810 + 216 + 405 + 216 + 54 + 405 + 216 + 108 + 81 = 4047$$

olika tal.

(c) För den första siffran finns 9 val (får inte vara 0), för den andra finns 9 val, för den tredje finns 8 val och för den fjärde finns 7 val. Det ger $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ olika tal.