MATEMATIK
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA

TMV200/211 – Diskret matematik

Tentamen: 2022-10-22, 14.00–18.00
Telefonvakt: Christian Johansson, 031-772 5325
Hjälpmedel: Inga
Betygsgränser: 20 poäng – 3, 30 poäng – 4, 40 poäng – 5, 50 poäng totalt
Observera: Beräkningar och motiveringar ska redovisas.
Endast svar ger ingen poäng om inte annat anges.

---

1. (a) Avgör om följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} (t \vee \neg q) \to r \\ p \vee t \\ q \to \neg p \\ \hline r \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara varför. Om det inte är giltigt, ge ett motexempel. (4p)

(b) En Hamiltonväg i en graf är en väg som går igenom varje nod exakt en gång. Betrakta påståendet “Om en graf har en Hamiltonväg är den sammanhängande”. Skriv påståendet på predikatlogisk form (glöm inte att definiera ett lämpligt universum) och avgör om det är sant eller falsk. (4p)

2. Låt $A, B \in \mathbb{R}$ och definiera en talföljd $a_0, a_1, a_2, \ldots$ rekursivt enligt

$$\begin{cases} a_0 = A; \\ a_1 = 2B; \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att $a_n = n(B - A) \cdot 2^n + A \cdot 2^n$ för alla heltal $n \geq 0$. (6p)

3. Låt $m, n \geq 1$ vara heltal, och låt $K_{m,n}$ vara den fullständigt bipartita grafen med m röda noder och n blå noder.

(a) Rita ut $K_{3,3}$ och ange antalet kanter i grafen. (1p)

(a) För vilka värden på m och n har $K_{m,n}$ en Eulerväg men inte en Eulercykel? (3p)

(b) Låt G vara den **riktade** grafen som vi får från den vanliga grafen $K_{2,2}$ genom att låta kanterna i $K_{2,2}$ ha en pil från den röda noden till den blå noden. Ange grannmatrisen A för G. Vad blir A^2? Kan du motivera svaret utan att faktiskt utföra matrismultiplikation? (3p)

Var god vänd!

4. Låt $M = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ och definera en relation $\sim$ på $M \times M$ genom $(a, b) \sim (c, d)$ om $ac > 0$ och $bd > 0$.

(a) Visa att $\sim$ är en ekvivalensrelation. (3p)

(b) Hur många ekvivalensklasser har $\sim$? Beskriv dem, antingen med ord, formler eller en bild. (3p)

5. Låt $k \in \mathbb{Z}_+$ och låt $A_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. En bijektion $f : A_k \to A_k$ kallas för en permutation av A_k, och vi säger att $x \in A_k$ är en fixpunkt till en permutation f om $f(x) = x$.

(a) Ange hur många permutationer det finns av A_k. Endast svar krävs. (1p)

(b) Låt B_k vara mängden av de permutationer av A_k som inte har några fixpunkter, och låt $b_k = |B_k|$ vara antalet element i B_k. Definiera $b_0 = 1$. Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_{n-k} = n!$$

för alla $n \in \mathbb{Z}_+$. (4p)

(c) Kan du gissa en formel för b_n? Endast svar krävs. (2p)

6. (a) Bestäm alla heltalslösningar (x, y) till den diofantiska ekvationen $15x + 18y = 21$. (4p)

(b) Bestäm alla heltalslösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 5^x \equiv 2 \quad (7) \\ x \equiv 9 \quad (13). \end{cases}$$

(4p)

7. Svaren i den här uppgiften behöver **inte** ges som explicita tal; (rimliga) matematiska uttryck är ok men svaret skall framgå tydligt. En klass på 15 elever skall ha en friluftsdag där det finns 4 olika aktiviteter att välja på.

(a) På hur många sätt kan vi fördela eleverna mellan de olika aktiviteterna om det spelar roll vilken elev som gör vilken aktivitet? (2p)

(b) På hur många sätt kan vi fördela eleverna mellan de olika aktiviteterna om vi endast bryr oss om hur många elever som utför varje aktivitet? (2p)

(c) I klassen går Adam, Erik och Jakob, som ofta bråkar med varandra. På hur många sätt som i (a) kan vi fördela eleverna om Adam, Erik och Jakob måste ha olika aktiviteter? (2p)

(d) På hur många sätt som i (b) kan vi fördela eleverna om varje aktivitet högst kan ha fem elever? (2p)

Lycka till!
Christian

Lösningsförslag:

1. (a) Vi gör ett motsägelsebevis: Antag att hypoteserna är sanna men slutsatsen falsk. r är slutsatsen, så den är falsk. Eftersom hypotesen $(t \vee \neg q) \to r$ är sann och r är falsk så är $t \vee \neg q$ falsk, dvs t falsk och q sann. För att hypotesen $p \vee t$ skall vara sann måste p då vara sann. Men då har vi att q är sann och p är sann, så hypotesen $q \to \neg p$ är falsk. Alltså har vi en motsägelse, och argumentet är giltigt.

(b) Låt U vara mängden av alla grafer och definiera två predikat $H(x)$ och $S(x)$ på U enligt följande:

$H(x)$: "x har en Hamiltonväg"

$S(x)$: "x är sammanhängande"

Då kan vi skriva påståendet som $\forall x \in U : H(x) \to S(x)$. Det är sant eftersom en graf är sammanhängande om varje par av noder kan kopplas ihop med en väg, och Hamiltonvägar kopplar samman alla noder.

2. Vi visar formeln med induktion. Sätt $g(n) = n(B - A) \cdot 2^n + A \cdot 2^n$; vi skall visa att $a_n = g(n)$ för alla heltal $n \geq 0$.

Basfall $n = 0$ och $n = 1$: Vi har $g(0) = 0 \cdot (B - A) \cdot 2^0 + A \cdot 2^0 = A$ samt $a_0 = A$ per definition, och $g(1) = 1 \cdot (B - A) \cdot 2^1 + A \cdot 2^1 = 2B - 2A + 2A = 2B$ samt $a_1 = 2B$ per definition, så basfallen stämmer.

Induktionssteg: Låt $n \geq 2$ och antag att $a_{n-1} = g(n-1)$ samt $a_{n-2} = g(n-2)$ (induktionsantagandet). Vi vill visa att $a(n) = g(n)$. Enligt den rekursiva definitionen av a_n och med vårt induktionsantagande får vi

$$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} = 4g(n-1) - 4g(n-2) =$$

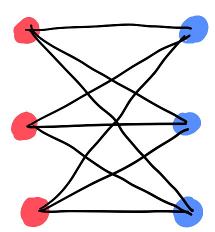
$$= 4(n-1)(B-A) \cdot 2^{n-1} + 4A \cdot 2^{n-1} - 4(n-2)(B-A) \cdot 2^{n-2} - 4A \cdot 2^{n-2} =$$

$$= 2(n-1)(B-A) \cdot 2^n + 2A \cdot 2^n - (n-2)(B-A) \cdot 2^n - A \cdot 2^n =$$

$$= (B-A) \cdot 2^n \cdot (2(n-1) - (n-2)) + A \cdot 2^n \cdot (2-1) = n(B-A) \cdot 2^n + A \cdot 2^n = g(n),$$

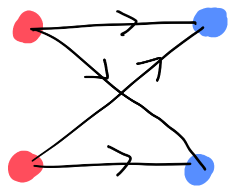
vilket är vad vi ville visa. Det avslutar induktionssteget, och formeln är därmed bevisad för alla heltal $n \geq 0$.

3. (a) $K_{3,3}$ är nedan, och antalet kanter är 9.



(b) $K_{m,n}$ har m noder med gradtal n och n noder med gradtal m. För att ha en Eulerväg men inte en Eulerväg skall exakt två gradtal vara udda och resten jämna. Så vi behöver antingen $m = 2$ och n udda, eller m udda och $n = 2$, eller $m = n = 1$.

(c) G ser ut enligt följande



och grannmatrisen och dess kvadrat är

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi kan se att det inte finns några riktade vägar av längd 2 i G, så därför är $A^2 = 0$.

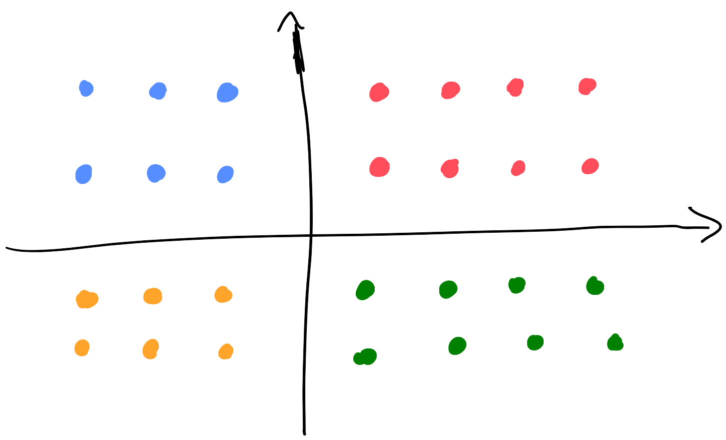
4. (a) Reflexivitet: $(a, b) \sim (a, b)$ eftersom $a^2 > 0$ och $b^2 > 0$.

Symmetri: Om $(a, b) \sim (c, d)$ så är $ac > 0$ och $bd > 0$, så $ca > 0$ och $db > 0$, dvs $(c, d) \sim (a, b)$.

Transitivitet: Om $(a, b) \sim (c, d)$ och $(c, d) \sim (e, f)$, så är $ac > 0$, $bd > 0$, $ce > 0$ och $df > 0$. Då är $ae = (ac)(ce)/c^2 > 0$ och $bf = (bd)(df)/d^2 > 0$, så $(a, b) \sim (e, f)$.

Alltså är $\sim$ en ekvivalensrelation.

(b) Vi har $(a, b) \sim (c, d)$ om och endast om a och c har samma tecken, och b och d har samma tecken. Så det finns fyra ekvivalensklasser, motsvarande de fyra kvadranterna i planet.



5. (a) Det finns $k!$ permutationer.

(b) Låt C_k vara mängden av alla permutationer av A_n som har exakt k fixpunkter. Eftersom varje permutation av A_n ligger i C_k för exakt ett värde av k får vi att

$$\sum_{k=0}^{n} |C_k| = n!,$$

så vi behöver visa att $|C_k| = \binom{n}{k} b_{n-k}$. För att skapa en permutation i C_k behöver man välja k element ur A_n som skall vara fixpunkter, vilket kan göras på $\binom{n}{k}$, och sedan permutera resterande $n-k$ element på ett sätt så det inte finns några fixpunkter bland dem, vilket kan göras på b_{n-k} sätt. Alltså är $|C_k| = \binom{n}{k} b_{n-k}$, och formeln är bevisad.

(c) Formeln är $b_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$.

6. (a) Vi har sgd$(15, 18) = 3$, så vi kan dela ekvationen med 3 och får $5x + 6y = 7$. Först hittar vi en lösning till $5u + 6v = 1$; med Euklides algoritm eller på annat sätt kan vi se att $(u, v) = (-1, 1)$. Vi multiplicerar den lösningen med 7 för att få vår första lösning $(x_0, y_0) = (-7, 7)$. Samtliga lösningar ges då av

$$(x, y) = (-7 + 6n, 7 - 5n) \quad n \in \mathbb{Z}.$$

(b) Vi fokuserar först på ekvationen $5^x \equiv 2$ (7). Modulo 7 har vi

$$5^0 \equiv 1,\ 5^1 \equiv 5,\ 5^2 \equiv 4,\ 5^3 \equiv 6,\ +, 5^4 \equiv 2,\ 5^5 \equiv 3,\ 5^6 \equiv 1.$$

(Observera att $5^6 \equiv 1$ (7) också enligt Eulers sats/Fermats lilla sats). Eftersom $5^6 \equiv 1$ (7) så kommer mönstret, så $5^x \equiv 2$ (7) om och endast om $x \equiv 4$ (6). Alltså får vi ekvationssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 4 & (6) \\ x \equiv 9 & (13) \end{cases}$$

som vi kan lösa. Första ekvationen ger $x = 4 + 6y$ med $y \in \mathbb{Z}$ och insättning i andra ger $4 + 6y \equiv 9$ (13), som vi kan skriva om som $6y \equiv 5$ (13). Inversen till 6 modulo 13 är -2, så

$$y \equiv -10 \equiv 3 \ (13).$$

Alltså är $y = 3 + 13n$ med $n \in \mathbb{Z}$ är därmed är

$$x = 4 + 6y = 4 + 6(3 + 13n) = 22 + 78n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

den allmänna lösningen.

7. (a) Vi har 15 elever och 4 val per elev, så vi får 4^15 sätt att fördela eleverna på.

(b) Här har vi 15 identiska "bollar" (eleverna) som vi skall fördela över 4 "lådor" (aktiviteterna), kan göras på $\binom{18}{3}$ sätt.

(c) Vi har $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ val för aktiviteter för Adam, Erik och Jakob eftersom de skall göra olika saker, och sedan 4^12 val för de övriga 12 eleverna, så totalt $24 \cdot 4^12$ sätt.

(d) Vi räknar omvänt. Låt A_i för $i \in I = \{1, 2, 3, 4\}$ vara antalet sätt att fördela eleverna med minst 6 elever i aktivitet i, och låt A_{ij} vara antalet sätt fördela eleverna med minst 6 elever i aktivitet i och 6 elever i aktivitet j, för $i, j \in I$ och $i < j$. Enligt principen om inklusion-exklusion och del (b) är svaret på frågan

$$\binom{18}{3} - A_1 - A_2 - A_3 - A_4 - A_{12} - A_{13} - A_{14} - A_{23} - A_{24} - A_{34}.$$

(Notera här att vi inte kan ha minst 6 elever per aktivitet i mer än två aktiviteter). För alla $i \in I$ har vi $A_i = \binom{12}{3}$ (först låter vi sex elever göra aktivitet i, sen fördelar vi resterande 9 elever över de fyra aktiviteterna), och för alla i, j som ovan har vi $A_{ij} = \binom{6}{3}$ (först låter vi sex elever göra aktivitet i, sex elever göra aktivitet j, och sen fördelar vi resterande 3 över de fyra aktiviteterna). Alltså blir svaret

$$\binom{18}{3} - 4 \cdot \binom{12}{3} + 6 \cdot \binom{6}{3}.$$