Tentamen i TMV200 Diskret matematik 2019-08-30 kl. 14:00–18:00

Examinator: Stefan Lemurell
Telefonvakt: Stefan Lemurell, telefon: x5303
Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre kvävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 30 poäng, och för betyget fem krävs minst 40 poäng. Lösningar publiceras på kurshemsidan efter skrivningen. Resultatet meddelas i LADOK, och bör synas senast 2019-09-20. Information om eventuellt granskningstillfälle kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida (deluppgifter går dock bra). Motivera dina svar väl—det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaren. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ibland ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

---

1. Avgör huruvida följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} p \to (q \vee r) \\ q \to (p \vee r) \\ r \to (p \vee q) \\ p \vee q \vee r \\ \hline p \wedge q \wedge r \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara i så fall varför. Om argumentet inte är giltigt, ge i så fall ett motexempel. (6p)

2. Låt som vanligt *Fibonaccitalen* definieras genom

$$F(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } n = 0, \\ 1 & \text{om } n = 1, \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{om } n \geq 2. \end{cases}$$

Visa att det för alla $n \in \mathbb{Z}_+$ gäller att $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} F(k)^2 = F(n)F(n+1)$. (7p)

3. Betrakta mängden $S = \{\pm\sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$, försedd med vanlig addition och multiplikation (dvs samma som i $\mathbb{R}$).

(a) Finns det någon identitet för addition i S? (1p)

(b) Är S sluten under addition, dvs gäller det för alla a och b i S att även summan $a + b$ tillhör S? (2p)

(c) Har varje $x \in S$ en additiv invers i S? (1p)

(d) Finns det någon identitet för multiplikation i S? (1p)

(e) Är S sluten under multiplikation, dvs gäller det för alla a och b i S att även produkten ab tillhör S? (2p)

Bevis eller motexempel krävs i varje deluppgift.

Var god vänd!

4. Till en stor fest beställdes färre än tusen chokladpraliner, så att de skulle räcka till alla nittio närvarande. Om alla hade ätit lika många praliner vardera skulle det ha blivit tolv praliner kvar. I slutändan var det sju personer som inte ville ha några praliner alls, men efter att alla andra hade ätit lika många praliner vardera fanns det 47 praliner kvar. Hur många praliner beställdes? (6p)

5. För alla naturliga tal n, låt $Q(n)$ beteckna det största naturliga talet q sådant att $q^2 \leq n$. Låt $\mathcal{R}$ vara relationen på $\mathbb{N}$ som definieras genom

$$a\mathcal{R}b \quad \Leftrightarrow \quad Q(a) = Q(b).$$

(a) Visa att $\mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation. (3p)

(b) Är $\mathcal{R}$ antisymmetrisk? (1p)

(c) Ange alla primtal som tillhör samma ekvivalensklass som 40. (1p)

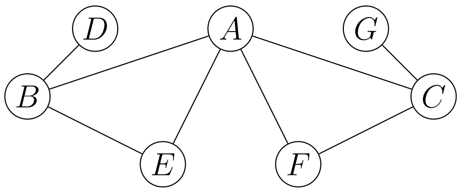
6. Givet bokstäverna i ordet ARRANGEMANG, hur många olika ”ord” av längd fem kan bildas om

(a) alla A måste användas? (2p)

(b) fyra olika bokstäver skall användas? (2p)

(c) RE måste förekomma i alla orden? (2p)

7. Låt H vara grafen i figuren nedan:



(a) Går det att lägga till en kant i H så att den nya grafen får en Eulercykel? (2p)

(b) Hur många delgrafer till H är träd med sju noder? (3p)

(c) Vad är minsta antalet kanter som behöver läggas till eller tas bort för att grafen skall bli bipartit? (2p)

Tänk på att alltid motivera dina svar ordentligt! Endast svar ger inte poäng.

8. Låt som vanligt $\Phi(n)$ beteckna Eulers Φ-funktion.

(a) Visa att om $\text{sgd}(\Phi(m), \Phi(n)) = 1$ så är $\text{sgd}(m, n) \leq 2$. (2p)

(b) Beräkna $\Phi(352)$. (1p)

(c) Bestäm det minsta positiva talet x som uppfyller $x = 7^{7042} \mod 352$. Glöm inte att kontrollera förutsättningarna för eventuella satser du använder. (3p)

Lycka till!