Tentamen i TMV200 Diskret matematik 2019-01-18 kl. 14:00–18:00

Examinator: Mårten Wadenbäck
Telefonvakt: Mårten Wadenbäck, telefon: x3584
Hjälpmedel: Penna, suddgummi, linjal, pennvässare

För betyget tre krävs minst 20 poäng, för betyget fyra krävs minst 30 poäng, och för betyget fem krävs minst 40 poäng. Resultatet meddelas i LADOK senast 2019-02-08. Tid och plats för visning kommer att anslås på kurshemsidan senast samma datum.

OBS: Skriv tydligt och luftigt, på *en* sida av varje pappersark. Behandla högst en uppgift per sida. Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak motiveringarna och beräkningarna som ger poäng, inte svaret. Ofullständig eller bristfällig lösning kan ändå ge delpoäng, så försök även om du är osäker. Numrera de inlämnade bladen *efter* att du sorterat dem! Använd inte röd penna, men gärna annan färg.

1. Avgör huruvida följande argument är giltigt eller ej:

$$\begin{array}{r} \neg(p \to r) \\ p \land \neg q \\ r \lor \neg p \\ q \to p \\ \hline (q \land \neg r) \to q \end{array}$$

Om argumentet är giltigt, förklara i så fall varför. Om argumentet inte är giltigt, ge i så fall ett motexempel. (6p)

2. Visa att det för alla $n \geq 1$ gäller att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}.$$

Eventuellt hjälper det att veta att $(n+1)^2(3(n+1)+5) = 3n^3 + 14n^2 + 19n + 8$. (7p)

3. Låt M vara mängden av 2×3-matriser med element i $\mathbb{Z}_3$, och låt $\star$ vara operatorn på M given av

$$x \star y = x + y + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix}$$

för alla $x, y \in M$.

(a) Är $\star$ associativ? (2p)

(b) Har $\star$ någon identitet? (2p)

(c) Har $\begin{bmatrix} [2] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [2] \end{bmatrix}$ någon invers med avseende på $\star$? (2p)

Bevis eller motexempel krävs i varje deluppgift.

Var god vänd!

4. (a) Bestäm alla heltal x som uppfyller kongruenssystemet

$$\begin{cases} x \equiv 39 \mod 44 \\ x \equiv 24 \mod 105. \end{cases}$$

(5p)

(b) Är alla x som uppfyller kongruenssystemet i (a) jämnt delbara med tre? (2p)

5. Låt $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Bestäm antalet reflexiva relationer på A. (1p)

(b) Bestäm antalet symmetriska relationer på A. (2p)

(c) Bestäm antalet ekvivalensrelationer på A. (2p)

6. Hur många olika ”ord” kan bildas med hjälp av bokstäverna i ordet BUBBELPOOL, om vi kräver att alla bokstäverna används och

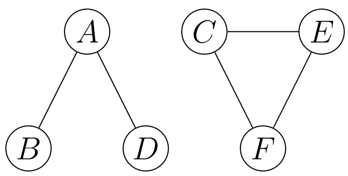
(a) det inte finns några andra krav? (2p)

(b) det måste stå precis sex bokstäver mellan U och P? (2p)

(c) BULLE måste förekomma i alla orden? (2p)

Svaren i denna uppgiften behöver inte förenklas.

7. Låt G vara grafen i figuren nedan:



(a) Är G en bipartit graf? (2p)

(b) Har G någon Eulerväg? (1p)

(c) Hur många nya grafer som innehåller en Eulercykel kan vi bilda genom att lägga till två kanter till G? (2p)

(d) Hur många nya grafer som innehåller en Eulercykel kan vi bilda genom att lägga till tre kanter till G? (2p)

Tänk på att alltid motivera dina svar ordentligt! Endast svar ger inte poäng.

8. Låt som vanligt $\Phi(n)$ beteckna Eulers Φ-funktion, och låt $D(n)$ beteckna mängden av alla positiva delare till n, dvs $D(n) = \{d \in \mathbb{Z}_+ : d|n\}$. Antag vidare att p, q, och r är tre *olika* primtal.

(a) Ange mängden $M = D(pqr)$ genom att lista alla dess element. (2p)

(b) Beräkna $\sum_{d \in M} \Phi(d)$, där mängden M är samma som i (a). (4p)

Lycka till!