1. Om argumentet *inte* är giltigt går det att hitta ett motexempel, dvs en uppsättning sanningsvärden för vilka alla hypoteserna är sanna medan slutsatsen är falsk. Vi försöker konstruera ett motsägelsebevis (eller ett motexempel, om det skulle visa sig att argumentet inte är giltigt). Vi gör därför antagandet att alla hypoteserna är sanna och att slutsatsen är falsk.

Slutsatsen består av en implikation, och enda fallet där en implikation är falsk är fallet $S \to F$, så för att göra slutsatsen falsk måste

$$\begin{cases} (q \wedge \neg r) = S \\ q = F. \end{cases}$$

Detta kan inte inträffa, så vi har funnit en motsägelse. Alltså är argumentet giltigt.

Svar: Argumentet är giltigt, enligt motsägelsebeviset ovan.

2. *Alternativ 1:* Vi visar detta genom induktion. Inför beteckningarna

$$VL(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} \qquad \text{och} \qquad HL(n) = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)},$$

och låt $U(n)$ vara utsagan (påståendet) att $VL(n) = HL(n)$.
Eftersom

$$VL(1) = \sum_{k=1}^{1} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{4}{1(1+2)} = \frac{4}{3}$$

och

$$HL(1) = \frac{1(3\cdot 1+5)}{(1+1)(1+2)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

är $U(1)$ sann, och vi har alltså ett giltigt *basfall*.
Vi skall nu visa *induktionssteget*, dvs att $U(p) \Rightarrow U(p+1)$. Antag därför att $U(p)$ är sann för något visst p, dvs att $VL(p) = HL(p)$. Det gäller nu att

$$\begin{aligned}
VL(p+1) &= \sum_{k=1}^{p+1} \frac{4}{k(k+2)} = \frac{4}{(p+1)(p+1+2)} + \sum_{k=1}^{p+1} \frac{4}{k(k+2)} \\
&= \frac{4}{(p+1)(p+3)} + VL(p) = \frac{4}{(p+1)(p+3)} + HL(p) \\
&= \frac{4}{(p+1)(p+3)} + \frac{p(3p+5)}{(p+1)(p+2)} \\
&= \frac{4(p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \frac{p(3p+5)(p+3)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{4p+8+p(3p^2+14p+15)}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{3p^3+14p^2+19p+8}{(p+1)(p+2)(p+3)} \\
&= \frac{(p+1)^2(3(p+1)+5)}{(p+1)(p+2)(p+3)} = \frac{(p+1)(3(p+1)+5)}{(p+2)(p+3)} = HL(p+1),
\end{aligned}$$

där de coelinblå uttrycken ovan är lika enligt antagandet att $U(p)$ är sann. Vi har nu funnit att $U(p+1)$ är sann så fort $U(p)$ är sann, dvs induktionssteget $U(p) \Rightarrow U(p+1)$ gäller.
Vi har ett giltigt basfall och ett induktionssteg, och *induktionsprincipen* ger därför att $U(n)$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

Alternativ 2: Vi kan partialbråksuppdela $\frac{4}{k(k+2)}$, dvs bestämma konstanter A och B sådana att

$$\frac{4}{k(k+2)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+2}$$

för alla $k \geq 1$. Då blir

$$\frac{A}{k} + \frac{B}{k+2} = \frac{(A+B)k + 2A}{k(k+2)} = \frac{4}{k(k+2)},$$

så $A + B = 0$ och $2A = 4$, dvs $A = 2$ och $B = -2$.
Nu blir

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{k(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{k} - \frac{2}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k+2} = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} - \sum_{k=3}^{n+2} \frac{2}{k} = \\
&= \frac{2}{1} + \frac{2}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{2}{k} - \sum_{k=3}^{n} \frac{2}{k} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \\
&= 3 - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = \\
&= \frac{3(n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{3(n^2+3n+2) - 4n - 6}{(n+1)(n+2)} = \\
&= \frac{3n^2 + 5n}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)},
\end{aligned}$$

vilket skulle visas.

3. (a) Vi undersöker om $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$ för alla $x, y, z \in M$. Eftersom

$$\begin{aligned}
(x \star y) \star z &= \left(x + y + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} \right) \star z = \\
&= x + y + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} + z + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} = \\
&= x + y + z + \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}
x \star (y \star z) &= x \star \left(y + z + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} \right) = \\
&= x + y + z + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} = \\
&= x + y + z + \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ger samma resultat är $\star$ associativ.

Svar: Ja, $\star$ är associativ.

(b) Vi ser om det går att hitta ett element $e \in M$ sådant att $x \star e = e \star x = x$ för alla $x \in M$. Vi kontrollerar lätt att $\star$ är kommutativ, dvs att $x \star y = y \star x$ för alla $x, y \in M$, så det räcker att betrakta $x \star e = x$:

$$x \star e = x \quad \Leftrightarrow \quad x + e + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} = x \quad \Leftrightarrow \quad e = -\begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix}.$$

Svar: Ja, identiteten är $e = -\begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix}$.

(c) Givet $x = \begin{bmatrix} [2] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [2] \end{bmatrix}$ söker vi ett element y sådant att $x \star y = y \star x = e$, där $e = \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix}$ är identiteten vi fann i (b). Vi har redan i förbigående konstaterat att $\star$ är kommutativ, så vi betraktar bara $x \star y = e$:

$$\begin{aligned} x \star y = e \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} [2] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [2] \end{bmatrix} + y + \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad y = \begin{bmatrix} [2] & [0] & [1] \\ [0] & [2] & [2] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [1] & [0] & [2] \\ [0] & [1] & [1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [2] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [2] \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad y = \begin{bmatrix} [2] & [1] & [2] \\ [0] & [0] & [2] \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Svar: Ja, inversen till $\begin{bmatrix} [2] & [2] & [0] \\ [0] & [1] & [2] \end{bmatrix}$ är $\begin{bmatrix} [2] & [1] & [2] \\ [0] & [0] & [2] \end{bmatrix}$.

4. (a) Eftersom $44 = 2^2 \cdot 11$ och $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ är relativt prima (kan även kontrolleras med Euklides algoritm) lovar kinesiska restsatsen att systemet är lösbart. Första kongruensen ger omedelbart att $x = 39 + 44s$ för något heltal s. Insättning av detta i andra kongruensen ger

$$39 + 44s \equiv 24 \mod 105 \quad \Leftrightarrow \quad 44s \equiv -15 \equiv 90 \mod 105.$$

För att lösa ut s ur denna kongruensen letar vi upp inversen till 44 modulo 105, och multiplicerar med denna i bägge led. Euklides algoritm ger

$$\begin{aligned} 105 &= 2 \cdot 44 + 17 \\ 44 &= 2 \cdot 17 + 10 \\ 17 &= 1 \cdot 10 + 7 \\ 10 &= 1 \cdot 7 + 3 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1, \end{aligned}$$

och baklänges

$$\begin{aligned} 1 &= 7 - 2 \cdot 3 = 7 - 2(10 - 1 \cdot 7) = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 = 3(17 - 1 \cdot 10) - 2 \cdot 10 = \\ &= 3 \cdot 17 - 5 \cdot 10 = 3 \cdot 17 - 5(44 - 2 \cdot 17) = 13 \cdot 17 - 5 \cdot 44 = \\ &= 13(105 - 2 \cdot 44) - 5 \cdot 44 = 13 \cdot 105 - 31 \cdot 44. \end{aligned}$$

Vi ser alltså att inversen till 44 modulo 105 är $-31 \equiv 74 \mod 105$. Genom att multiplicera bägge led med 74 i kongruensen $44s \equiv 90 \mod 105$ får vi

$$\begin{aligned} 44s \equiv 90 \mod 105 \quad &\Leftrightarrow \quad 74 \cdot 44s \equiv 74 \cdot 90 \mod 105 \quad \Leftrightarrow \\ s \equiv 74 \cdot 90 \equiv 740 \cdot 9 &\equiv 5 \cdot 9 \equiv 45 \mod 105. \end{aligned}$$

Detta innebär att $s = 45 + 105t$ för något heltal t.

Vi kom tidigare fram till att $x = 39 + 44s$, och detta ger oss nu

$$\begin{aligned} x = 39 + 44s = 39 + 44(45 + 105t) = 39 + 44 \cdot 45 + 4620t = \\ = 39 + 22 \cdot 90 + 4620t = 39 + 1980 + 4620t = 2019 + 4620t, \end{aligned}$$

där t är ett godtyckligt heltal.

Svar: Alla lösningar ges av $x = 2019 + 4620t$, där t är ett heltal.

(b) Eftersom siffersumman i såväl 2019 som 4620 är delbar med tre så är båda talen delbara med tre, och alltså kommer $x = 2019 + 4620t$ alltid att vara delbart med tre för alla heltal t.

Svar: Ja, alla x som uppfyller systemet är delbara med tre.

5. (a) Varje relation på A är per definition en delmängd av $A \times A$. En relation skapas genom att vi för vart och ett av de $|A \times A| = 16$ elementen i $A \times A$ bestämmer om elementet skall ingå i relationen eller ej.

Varje reflexiv relation på A måste innehålla elementen (j, j) för $j = 1, \dots 4$, så det är bara de 12 övriga elementen som ger upphov till val. Detta ger $2^{12} = 4096$ reflexiva relationer på A.

Svar: Det finns $2^{12} = 4096$ reflexiva relationer på A.

(b) För de symmetriska relationerna gäller att om (i, j) ingår i relationen så ingår även (j, i) i relationen. Således kan vi egentligen bara göra val för elementen (i, j) där $1 \leq i \leq j \leq 4$. Detta är tio element, så vi får $2^{10} = 1024$ symmetriska relationer på A.

Svar: Det finns $2^{10} = 1024$ symmetriska relationer på A.

(c) Varje ekvivalensrelation på A svarar mot precis en partition av A, så vi väljer att räkna antalet partitioner istället. Följande fall finns:

- A delas upp i fyra delar med vardera ett element. Det finns precis en sådan partition.
- A delas upp i tre delar, där en av delarna innehåller två element. Det finns precis $\binom{4}{2} = 6$ sådana partitioner.
- A delas upp i två delar, där en av delarna innehåller tre element och den andra innehåller ett element. Det finns precis $\binom{4}{3} = 4$ sådana partitioner.
- A delas upp i två delar, där båda innehåller två element vardera. Det finns precis $\frac{\binom{4}{2}}{2!} = 3$ sådana partitioner.
- A delas inte upp. Det finns precis en sådan partition.

Sammantaget finns alltså $1 + 6 + 4 + 3 + 1 = 15$ olika partitioner av A, och alltså 18 olika ekvivalensrelationer på A.

Svar: Det finns 15 olika ekvivalensrelationer på A.

6. (a) Det finns totalt tio bokstäver att använda, där vissa dock är av samma sort. Om alla bokstäverna hade varit olika hade det funnits 10! ”ord”, men eftersom de tre exemplaren av B kan kastas om på 3! sätt och ändå ge samma ord behöver vi dela på 3!, och motsvarande för L och O. Det kan alltså bildas $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ ”ord”.

Svar: Det kan bildas $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$ ”ord”.

(b) Vi placerar ut de åtta övriga bokstäverna först, och räknar sedan hur många ställen vi kan sticka in U och P på. Enligt samma typ av resonemang som i (a) kan de åtta bokstäverna ordnas på $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ sätt som ger olika ”ord”. När dessa har placerats ut finns det tre val av platser för U och P, och de kan dessutom sättas in i valfri ordning. Totalt ger det oss $\frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{8!}{2!\cdot 2!}$ ”ord”.

Svar: Totalt finns det $\frac{8!}{2!\cdot 2!}$ sådana ”ord”.

(c) Sätter vi ihop BULLE till en ny symbol $\mathcal{B}$ har vi de sex ”bokstäverna” i $\mathcal{B}$BBOOP att arrangera, och dessa kan skapa $\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$ olika ”ord”.

Svar: Det går att bilda $\frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$ sådana ”ord”.

7. (a) Nej, de tre noderna C, E, och F är alla kopplade till varandra och går alltså inte att dela in i två grupper utan kanter inom någon grupp.

Svar: Nej, G är inte bipartit.

(b) Nej, eftersom grafens två delar inte hänger ihop med varandra kan ingen väg besöka alla grafens kanter.

Svar: Nej, G saknar Eulerväg.

(c) För att den nya grafen skall innehålla en Eulercykel behöver vi lägga till de två nya kanterna så att grafen blir sammanhängande[1] och så att varje nod får ett jämnt gradtal. Enda sätten detta kan åstadkommas på är att välja ut en av noderna C, E, och F, och koppla denna till både B och D. Det kan alltså bildas tre grafer på det angivna sättet.

Svar: Det kan bildas tre sådana grafer.

(d) På samma sätt som i (c) skulle vi behöva göra grafen sammanhängande och sådan att varje nod har ett jämnt gradtal. Eftersom noderna i den högra ”delen” (C, E, och F) av G redan har jämna gradtal skulle precis två av de tre nya kanterna behöva gå till samma nod i den delen medan den tredje nya kanten lades till i den vänstra ”delen” (A, B, och D). När vi har lagt till en kant i vänstra ”delen” har alla noderna där också jämnt gradtal, så de båda nya kanterna mellan delarna skulle behöva gå till samma nod i vänsterdelen, och det går förstås inte (om vi inte bestämmer oss för att tillåta multigrafer).

Svar: Det går inte att bilda någon sådan graf.

8. (a) De positiva delarna till pqr får vi genom att använda inget, ett, två, eller alla tre primtalen, dvs $M = D(pqr) = \{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr\}$.

Svar: $M = D(pqr) = \{1, p, q, r, pq, pr, qr, pqr\}$.

(b) Eftersom p, q, och r är olika primtal blir

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= 1,\\
\Phi(p) &= p-1,\\
\Phi(q) &= q-1,\\
\Phi(r) &= r-1,\\
\Phi(pq) &= (p-1)(q-1) = pq - p - q + 1,\\
\Phi(pr) &= (p-1)(r-1) = pr - p - r + 1,\\
\Phi(qr) &= (q-1)(r-1) = qr - q - r + 1,\\
\Phi(pqr) &= (p-1)(q-1)(r-1) = (pq - p - q + 1)(r-1) =\\
&= pqr - pr - qr + r - pq + p + q - 1,
\end{aligned}$$

[1]Detta är normalt sett *inte* ett krav, eftersom det får lov att finnas lösa isolerade noder. I det här fallet finns det dock inga sådana.

och genom att addera dessa får vi $\sum_{d \in M} \Phi(d) = \ldots = pqr$ (detta är inte en slump, utan är en konsekvens av ett mer allmänt resultat).

Svar: Summan blir $\sum_{d \in M} \Phi(d) = pqr$.