Svar eller ofullständiga lösningar till TENTAMEN I ANALYS FÖR Z OCH TD1, TMV138/181

Onsdag 17 augusti 2020

1. Beräkna integralen $\int_0^\infty xe^{-2x}dx$ **(3p)**

   Svar: 1/4

2. Beräkna integralen $\int_{-1}^2 |x^3-3x|dx$ **(3p)**

   Svar: integralen kan skrivas: $\int_{-1}^0 (x^3-3x)dx - \int_0^{\sqrt{3}} (x^3-3x)dx + \int_{\sqrt{3}}^3 (x^3-3x)dx = 15/4$

3. Bestäm alla x för vilka serien $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n(3x-1)^n}{n^2}$ konvergerar. **(5p)**

   Svar: för alla $0 \leq x \leq \frac{2}{3}$

4. Beräkna $\sum_0^\infty \frac{n+1}{n!}$ **(6p)**

   Svar: 2e Vi vet från Maclaurinutvecklingen av e^x att $\sum_0^\infty \frac{1}{n!} = e$ och $\sum_0^\infty \frac{n}{n!} = \sum_1^\infty \frac{1}{(n-1)!} =$
   $= \sum_0^\infty \frac{1}{n!} = e$

5. Området som begränsas av *y*-axeln, kurvan $x = y^{\frac{3}{2}}$ samt tangenten till denna kurva i punkten (1,1) roterar kring *y*-axeln.
   Beräkna rotationsvolymen. **(6p)**

   Svar: tangenten ges av $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ och rotationsvolymen av

   $$2\pi \int_0^1 x\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} - x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \frac{\pi}{36}$$

6. En tank innehåller 100 liter rent vatten. En saltlösning med 1 gram salt per liter hälls ner i tanken med hastigheten 1 liter per minut. Samtidigt töms tanken med hastigheten 3 liter per minut. Hur mycket salt finns i tanken som mest och vid vilken tidpunkt sker detta? Vi förutsätter att innehållet i tanken hela tiden rörs om så att saltet fördelas likformigt. **(8p)**

Svar: differentialekvationen blir $s' = 1 - \frac{3s}{100-2t}$ där *s* är antalet gram salt i tanken.
Man får $s = 100 - 2t - \frac{1}{10}(100-2t)^{\frac{3}{2}}$ som är som störst då $t = \frac{250}{9} \approx 27.8$

7. Använd Maclaurinutvecklingar för att bestämma de värden på konstanten *a* som gör att gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(3x)-1}{x\sin(ax)}$ existerar.
Beräkna gränsvärdet för dessa värden på *a*. **(6p)**

Svar: efter utveckling får vi kvoten $\frac{-9x^2+O(x^4)}{ax^2+O(x^4)}$ så att $a \neq 0$ och gränsvärdet blir i så fall $= -\frac{9}{a}$

8.

a. Bestäm konstanter *a*, *b*, *c* och *d* sådana att $ax + b \leq \sqrt{1+x} \leq cx + d$ då $0 \leq x \leq 1$ **(2p)**

b. Visa med hjälp av uppskattningen i uppgift a. att $2.4 \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx \leq 2.5$ **(6p)**

(För att lösa uppgift b. krävs det förstås att konstanterna är tillräckligt bra.)

Svar: dra en linje mellan punkterna (0,1) och $\left(1, \sqrt{2}\right)$ samt tangenten till kurvan i den senare punkten för att få uppskattningen

$$\left(\sqrt{2}-1\right)x + 1 \leq \sqrt{x+1} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Sedan används denna olikhet med $\sin^2 x$ i stället för *x* och det faktum att $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \; dx = \pi$ för att få $1 + \sqrt{2} \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\sin^2 x}\, dx \leq \sqrt{8} + \frac{1}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$

9. Låt $\sum_1^\infty a_n$ vara en konvergent serie där $a_n > 0$ och $a_n \neq 1$

a. Avgör om serien $\sum_1^\infty (a_n)^2$ är konvergent. **(2p)**

b. Avgör om serien $\sum_1^\infty \frac{a_n}{1-a_n}$ är konvergent. **(3p)**

Svar: Bägge serier är konvergenta. Eftersom $\sum_1^\infty a_n$ är konvergent vet vi att $a_n \to 0$ och alltså gäller $a_n \leq C$ för vilken positiv konstant *C* som helst om bara *n* är tillräckligt stort.
I uppgift a. kan vi då skriva $(a_n)^2 \leq Ca_n$ och i b. att $\frac{a_n}{1-a_n} \leq \frac{1}{1-C} a_n$
(I den andra olikheten har vi valt $C < 1$)