Svar / lösningar till

tentamen i Analys för Z/TD

TMV138/LGI

19:e augusti 2019

(1)

a) $\int x \arctan x \, dx = \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$

$= \frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + C$

b) $\int_0^1 x\sqrt{x+2}\, dx = \int_2^3 (t-2)\sqrt{t}\, dt = \frac{2}{15}(8\cdot\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$

c) $\int_{-3}^{0} |x^2+3x+2|\, dx = \int_{-3}^{-2} x^2+3x+2 \, dx -$

$- \int_{-2}^{-1} x^2+3x+2 \, dx + \int_{-1}^{0} x^2+3x+2 \, dx = \frac{11}{6}$

(2)

a) $\sum_1^\infty n^{-2}$ är konvergent;

b) $\sum_0^\infty \frac{n^4}{2^n}$ är konvergent enl. kvotkriteriet

③ Homogen lösning

$y_h'' + 4y_h = 0 \Rightarrow y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

Partikulärlösning

Ansätt $y_p = a\sin x + b\cos x$

vi får $a = \frac{1}{3}$, $b = 0$

Allmän lösning: $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$

$y(0) = 1$, $y'(0) = 0 \Rightarrow A = 1$, $B = -\frac{1}{6}$

Svar: $y = \cos 2x - \frac{1}{6}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin x$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}\left(x + \frac{1}{2}\right)^n$

Vi har $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot n}{2^n\cdot(n+1)} = 2$

så $R = \frac{1}{2}$ och konvergens då $-\frac{1}{2} < x + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$

dvs $-1 < x < 0$

För $x = -1$ får vi betingad konvergens

För $x = 0$ divergenta serie

Svar: $-1 \leq x < 0$

~~6b~~ 5

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{x}{6} - \frac{1}{x} = \frac{6x - x^2 \sin x - 6 \sin x}{6x \sin x}$$

$$= \frac{6x - x^3 + \frac{x^5}{6} - 6x + x^3 - \frac{x^5}{20} + O(x^7)}{6x^2 + O(x^4)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{x}{6} - \frac{1}{x}\right) = \frac{7/60\, x^5 + O(x^7)}{6x^5 + O(x^7)} \to$$

$$\to \frac{7}{360} \quad \text{då} \quad x \to 0$$

6

$$\frac{3x}{x^2+1} - \frac{a}{x} = \frac{3x^2 - ax^2 - a}{x(x^2+1)} \approx \frac{1}{x} \quad \text{om} \quad a \neq 3$$

Eftersom $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ divergera måste $a = 3$

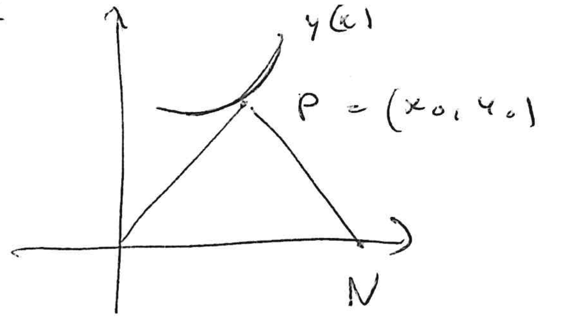
I så fall: $\int_1^\infty \frac{3x}{x^2+1} - \frac{3}{x}\,dx = 3\int_1^\infty \frac{-dx}{x(x^2+1)} = 3\int_1^\infty \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\,dx$

$$= 3\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \ln x\right]_1^\infty = 3\left[\ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right]_1^\infty =$$

$$= -\frac{3}{2}\ln 2$$

⑦ Två möjligheter:

I



Normalens ekv: $y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$

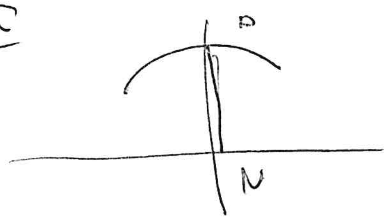
I N är $y=0$ och $x = 2x_0$

Differentialekv: $-y = -\frac{1}{y'(x)} \cdot x$

dvs $yy' = x$ med lösn $y^2 = x^2 + C$

Alltså $y^2 = x^2 + 3$

II



Här blir diffekv $-yy' = x$

med lösn $x^2 + y^2 = C$, alltså $x^2 + y^2 = 5$

Svar: $y^2 - x^2 = 3$

eller

$x^2 + y^2 = 5$

(8)

a) Bågländ $L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$

om f deriverbar och $\alpha \leq x \leq \beta$

b) Låt $f(x) = e^x$

Båglängde från $(0,1)$ till (x, e^x)

ges av $\int_0^x \sqrt{1 + e^{2t}}\, dt$

Den raka sträcka mellan samma

punkter ges av $\sqrt{(e^x - 1)^2 + (x - 0)^2} =$

$= \sqrt{e^{2x} - 2e^x + 1 + x^2}$