Tentamen TMV138/181

24:e april 2019

Svar eller lösningar

1a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)+C$

b) $\displaystyle\int_0^1 \ln(x+1)\,dx = \Big[(x+1)\ln(x+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,dx =$

$= 2\ln 2 - 1$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\cdot(1-\sin^2 x)\,dx = \left[\begin{matrix}\sin x = t\\ \cos x\,dx = dt\end{matrix}\right] =$

$\displaystyle = \int_0^1 1-t^2\,dt = \left(t-\frac{t^3}{3}\right)_0^1 = \frac{2}{3}$

2a) $\displaystyle\sum_0^\infty \frac{3\cdot(-1)^n}{4^n} = 3\cdot\sum_0^\infty\left(\frac{-1}{4}\right)^n = 3\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{12}{5}$

2b) Nej, $\frac{\arctan n}{n} > \frac{\pi/4}{n}$

så serien är divergent enligt jämförelsekriteriet

3) Ekvationen är separabel:

$y^2 dy = \frac{dx}{x}$, $\frac{y^3}{3} = \ln x + C$

$y(1) = 0 \Rightarrow C = 0$, $y = \sqrt[3]{3 \cdot \ln x}$

4)

$$\sum_1^\infty a_n (2x+3)^n = \sum_1^\infty 2^n \cdot a_n \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right)^n$$

Med $b_n = 2^n \cdot a_n$ blir $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(3n+2) \cdot 2}{2n+2} \to 3$

då $n \to \infty$ så $R = \frac{1}{3}$

och vi har konvergens om $-\frac{1}{3} < x + \frac{3}{2} < \frac{1}{3}$

dvs $-\frac{11}{6} < x < -\frac{7}{6}$

4 forts) För gränstallen, betrakta $c_n = a_n \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

$$= \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot 2^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n \cdot 3^n} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdots (n - \frac{1}{3})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} >$$

$$> \frac{\frac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \frac{2}{3} \frac{n-1}{n} > \frac{1}{3}$$

Så termerna i $\sum_1^\infty c_n \cdot (-1)^n$ går ej mot 0

Svar: serien konvergerar om $-\frac{11}{6} < x < -\frac{7}{6}$

5 b) $\frac{x}{x^4+1} \leq 1$ så $\sqrt{\frac{x}{x^4+1}} \geq \frac{x}{x^4+1}$

och $\int_1^\infty \frac{x}{x^4+1} dx = \left[\frac{1}{2} \arctan x^2\right]_1^\infty = \frac{\pi}{8}$

Dessutom är $\sqrt{\frac{x}{x^4+1}} \leq \sqrt{\frac{x}{x^4}} = x^{-3/2}$

och $\int_1^\infty x^{-3/2} dx = \left[-2x^{-1/2}\right]_1^\infty = 2$

6)

Låt $y(t)$ vara temperaturen inne där t är tiden i timmar

Vi har $y' = k(y+20)$, $y(0) = 20$, $y(1) = 18$

Ekvationen är linjär med lösning

$$y = Ce^{kt} - 20$$

$y(0) = 20 \Rightarrow C = 40$, $y(1) = 18 \Rightarrow k = \ln\frac{19}{20}$

Svar $y(24) = 40e^{24\ln\frac{19}{20}} - 20$

7)

Här är det enklast att derivera ekvationen tre gånger och på så sätt bestämma derivatorna av y i $x = 0$:

$$y''' + 2xy + x^2y' = 1$$

$$y^{(4)} + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 0$$

$$y^{(5)} + 2y' + 4y' + 4xy'' + 2xy'' + x^2y''' = 0$$

$\Rightarrow$

$y(0) = 2$ $\quad$ $y'''(0) = 1$

$y'(0) = 5$ $\quad$ $y^{(4)}(0) = -4$

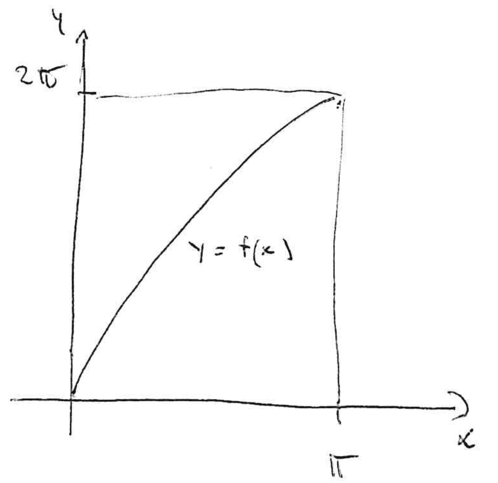
$y''(0) = 0$ $\quad$ $y^{(5)}(0) = -30$

7) forts

Vi får därför

$$y = 2 + 5x + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{4}x^5$$

8)



Vi ser i figuren att $\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_0^{2\pi} \phi(y)\,dy = 2\pi^2$

Eftersom $\int_0^{\pi} 2x + \sin x \, dx = \left[x^2 - \cos x\right]_0^{\pi} = \pi^2 + 2$

Alltså: $\int_0^{2\pi} \phi(y)\,dy = \pi^2 - 2$