Analys i en variabel för Z och TD, TMV138/181

Övningstentamen nr 2, januari 2019

Till uppgifterna 1 – 3 skall svar och lösningar anges på ett särskilt blad som medföljer tesen. Bara kortfattade motiveringar krävs.

1. Beräkna följande integraler **(9p)**

a. $\int_0^1 xe^{-x}dx$

b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{1+(\sin t)^2}dt$

c. $\int \frac{dx}{x^2-4}$

2. Avgör om följande serier är konvergenta **(6p)**

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-1)}{5^n n!}$

b. $\sum_{n=4}^{\infty} \frac{3n^2+4n}{n^3-4n+3}$

3. Bestäm alla lösningar till följande differentialekvationer **(6p)**

a. $y' + \sin x \cdot y = e^{\cos x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

b. $y'' + 2y' + 2y = 3e^{-x}$

Till uppgifterna 4 – 9 skall lösningen åtföljas av tydliga motiveringar

4. Beräkna volymen av det område som har som bas en kvadrat i (x,y)-planet med hörn i punkterna (1,0), (0,1), (-1,0) samt (0,-1).
Snitt i rät vinkel mot x-axeln bildar halvcirklar. **(6p)**

5. Bestäm alla *x* sådana att serien $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(2x+1)^{2n}}{4^n}$ blir konvergent. **(6p)**

6. Visa att den generaliserade integralen $I=\int_0^{\infty}\frac{dx}{e^x+\sin^2 x}$ är konvergent, och till och med att $I\le 1$. **(6p)**

7. Låt $f(x)=(\sin x^2)\cdot\ln(1-x^3)\cdot arctan(x+x^2)$
Bestäm $f^{(VI)}(0)$ **(6p)**

8.

a. Formulera och bevisa kvotkriteriet för positiva serier.

b. Visa att om $a_n>0$ och $\frac{a_{n+1}}{a_n}\ge\frac{n}{n+1}$ för alla *n* så är $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ divergent, till exempel genom att betrakta serien $\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ där $b_n=na_n$ **(7p)**