**SVAR OCH IBLAND LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I ANALYS FÖR Z OCH TD1, TMV138/181**

**Onsdag 16 januari 2019 kl 8.30 – 12.30**

1. Beräkna följande integraler:

   a. $\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

   **Svar:** $= 2\left[\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\right]_1^4 = 2\ln\frac{3}{2}$

   b. $\int \; x^3 \ln x \, dx$

   Svar: $= \frac{x^4 \ln x}{4} - \frac{x^4}{16} + C$

   c. $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

   Svar: $= [\arctan e^x]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

2. Avgör om följande serier är konvergenta:

   a. $\sum_{n=0}^\infty \frac{5n+\sqrt{n}}{n^3+3n+1}$

   Svar: serien är konvergent eftersom termernas storleksordning är $\frac{1}{n^2}$

   b. $\sum_{n=0}^\infty \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

   Svar: kvotkriteriet ger: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!\left((n+1)!\right)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \to 4$

   då $n \to \infty$ Serien är divergent.

3. Lös differentialekvationen $y'' + 4y = 4x^2 - 1$, med begynnelsevillkor $y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Svar: Homogenlösningen är $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

För partikulärlösningen ansätter vi $y_p = ax^2 + bx + c$; vi får $y_p = x^2 - \frac{3}{4}$

Med hjälp av begynnelsevillkoren blir lösningen $y = x^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cos 2x$

4. Bestäm alla *x* för vilka potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5x-4)^n}{\sqrt{n}}$ konvergerar.

Lösning: med $a_n = \frac{5^n}{\sqrt{n}}$ blir $R = \frac{1}{5}$ så vi har konvergens om $-\frac{1}{5} < x - \frac{4}{5} < \frac{1}{5}$

Om $x = 1$ är serien divergent, om $x = \frac{3}{5}$ är den betingat konvergent.

Svar: $\frac{3}{5} \leq x < 1$

5. Beräkna volymen av den figur vars bas är området ***ovanför*** *x*-axeln och ***under*** kurvan $y = 1 - x^2$.
Tvärsnitt i rät vinkel mot *x*-axeln är liksidiga trianglar.

Lösning: volymen blir $2\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{4}(1-x^2)^2 dx = \frac{4\sqrt{3}}{15}$

6. Använd Maclaurinutvecklingar för att bestämma gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x^2) - x^2}{2\cos x - e^{-x^2} - 1}$$

Genom att utveckla till och med grad 4 blir den givna kvoten

$\frac{-\frac{x^4}{2} + O(x^5)}{-\frac{5x^4}{12} + O(x^5)} \to \frac{6}{5}$ då $x \to 0$ Svar: 6/5

7. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen $y' = y(4-y)$ där $y$ är en funktion av $t \geq 0$.

Antag att vi lägger till ett begynnelsevillkor $y(0) = a$ där $a$ är en konstant med $a \geq 0$.
Vad händer med lösningen $y(t)$ då $t \to \infty$ för olika värden på $a$?

Lösning: ekvationen är separabel: $\frac{dy}{y(4-y)} = dt$. Integration leder till $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{y}{4-y}\right| = t + C$
Vi löser ut $y$: $y = \frac{4}{1+De^{-4t}}$. Till denna kommer en singulär lösning: $y = 0$

Begynnelsevillkoret, om $a > 0$, ger $y = \frac{4a}{a+(4-a)e^{-4t}}$
Så $y \to 4$ om $a > 0$, $y \to 0$ om $a = 0$

8.

a. Formulera integralkriteriet för en positiv avtagande serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

b. Visa att olikheten
$\frac{1}{2N^2} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{1}{2(N-1)^2}$
gäller för alla heltal $N > 1$

Lösning: enligt beviset för integralkriteriet gäller $\sum_{k=N}^{\infty} a_k > \int_N^{\infty} f(x)dx$ och $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k < \int_N^{\infty} f(x)dx$ där $a_k = f(k)$ som är positiv och avtagande.
Med $f(x) = \frac{1}{x^3}$ kan vi kombinera dessa olikheter till $\int_N^{\infty} \frac{dx}{x^3} < \sum_N^{\infty} \frac{1}{k^3} < \int_{N-1}^{\infty} \frac{dx}{x^3}$
Integration leder till den givna olikheten.