Övningstentamen i Matematisk för Z och TD, TMV138/181

December 2018

Till uppgifterna 1 – 3 skall svar och lösningar anges på ett särskilt blad som medföljer tentamenstesen. Bara kortfattade motiveringar krävs.

1. Beräkna följande integraler: **(9p)**

   a. $\int_0^1 xe^{2x}dx$

   b. $\int x^2 \cos x^3 dx$

   c. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+3x+2}$

2. **(5p)**

   a. Avgör om serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ är konvergent.

   b. För vilka *x* konvergerar potensserien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n}$?

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen
   $y'' + 5y' + 6y = 2e^{-x}$
   som uppfyller begynnelsevillkoren $y(0) = 2$ och $y'(0) = 1$ **(6p)**

Till uppgifterna 4 – 8 måste lösningarna vara tydligt motiverade.

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{x(\sin x - \arctan x)}{2e^{x^2} + \cos 2x - 3}$ **(5p)**

5. Avgör om den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ är konvergent. **(5p)**

6. Beräkna volymen av följande kropp: Basen utgörs av det område i (*x*,*y*)-planet som begränsas av *x*-axeln och kurvan $y = \cos x$ och som innehåller punkten $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.
Snitt i rät vinkel mot *x*-axeln bildar halvcirklar. **(6p)**

7.

a. En behållare innehåller från början 100 liter rent vatten. Man tillsätter en saltlösning om 2 gram salt per liter med hastigheten 1 liter per minut. Samtidigt töms behållaren med samma hastighet.
Ange en funktion som beskriver hur mängden salt i behållaren varierar med tiden. **(4p)**

b. Antag att man i stället tömmer behållaren med 2 liter vätska per minut men att inga andra uppgifter ändras. *(Den totala mängden vätska avtar alltså här.)*
Ange även i detta fall hur mängden salt varierar. **(4p)**

8.

a. Ange formeln för båglängden av en funktionskurva $y = f(x)$ **(2p)**

b. Visa att $\int_0^\alpha \sqrt{1 + \cos^2 \theta}\, d\theta > \sqrt{\alpha^2 + \sin^2 \alpha}$ om $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ **(4p)**
Ledning: formeln i a) kan vara till hjälp.