MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**
Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-08-20 kl. 08.30–12.30
Tentamen | Telefonvakt: Fanny Berglund
Telefon: 5325

TMV138/181 (TMV130) Matematisk analys i en variabel

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.
Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.
Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\dfrac{x(1-x)}{(x+2)^2(x+1)}$ (3 p)

(b) $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-2e^x+2}$ (3 p)

2. (a) Lös differentialekvationen (3 p)

$$xy'(x) = 1 - \frac{1}{\ln(x)}y(x), \qquad x > 1.$$

(b) Lös begynnelsevärdesproblemet (3 p)

$$\begin{cases} y'(x) = x\sqrt{4-y(x)^2}, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

3. (a) Beräkna följande gränsvärde om det existerar (3 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2) - x\arctan(x)}{\big(\cos(x)-1\big)^2}$$

(b) Beräkna $f^{(6)}(0)$ då (4 p)

$$f(x) = \sin(x^2)\cos(x)\ln(1+x^2)$$

4. Lös differentialekvationen (6 p)

$$y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = x + 1 + \sin(x).$$

5. Beräkna det största värdet av funktionen (6 p)

$$F(x) = \int_0^x \frac{1-t}{(1+t^2)(t+1)}dt \qquad 0 \le x \le 2.$$

Var god vänd!

6. Lös begynnelsevärdesproblemet (6 p)

$$\begin{cases} y''(x) + 2xy'(x) + 2y(x) = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

7. Formulera och bevisa integralkalkylens medelvärdessats. (6 p)

8. Visa att (6 p)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} = \frac{1}{2}.$$

Lycka till!

/Hossein

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\quad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\quad$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}
$$