MATEMATIK | **Hjälpmedel: Inga, inte ens miniräknare**

Chalmers tekniska högskola | Datum: 2018-04-04 kl. 14.00 - 18.00

Tentamen | Telefonvakt: Mattias Lennartsson

Telefon: 5325

TMV138/181 Matematisk analys i en variabel

Tentan rättas och bedöms anonymt. **Skriv tentamenskoden tydligt på placeringlista och samtliga inlämnade papper.** Fyll i omslaget ordentligt.

Betygsgränser: 3: 20-29 p, 4: 30-39, 5: 40-50.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida första vardagen efter tentamensdagen. Resultat meddelas via Ladok ca. tre veckor efter tentamenstillfället.

Till samtliga uppgifter skall fullständiga lösningar inlämnas. **Endast svar ger inga poäng**. Motivera och förklara så väl du kan.

1. Bestäm alla primitiva funktioner till

(a) $\dfrac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}$ (3 p)

(b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$ (3 p)

2. (a) Lös begynnelsevärdesproblemet (4 p)

$$\begin{cases} \big(1+\cos(x)\big)y'(x) = (1+e^{-y(x)})\sin(x), \\ y(0)=0. \end{cases}$$

(b) Bestäm alla deriverbara funktioner f sådana att (4 p)

$$f(x)+x^2-1 = \int_0^x 4tf(t)dt.$$

3. Beräkna följande gränsvärden om de existerar

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-e^{-x^2}}{\ln(1+x^4)}$ (3 p)

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sqrt{1+x^2})-\big(1-\cos(x)\big)}{\big(e^{x^2}-1\big)\sin^2(x)}$ (4 p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet (6 p)

$$\begin{cases} y''(x)+9y(x) = 9\cos(3x) \\ y(0)=0, y'(0)=1. \end{cases}$$

5. (a) Cirkeln $x^2+y^2=5$ och kurvan $y=\frac{2}{x}$ avgränsar tillsammans ett begränsat område i första kvadranten. Området roterar runt x-axeln så att en kropp uppstår. Beräkna kroppens volym. (3 p)

(b) Beräkna arean av den rotationsyta som bildas då kurvan $y=\frac{x^3}{12}+\frac{1}{x}$, $1\le x\le 4$, roterar kring y-axeln. (3 p)

Var god vänd!

6. Bestäm de reella konstanterna a och b så att (6 p)

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\big(\ln(1+x)\big)^3}{\big(b-\cos(x)\big)\sin(x)} = 1.$$

7. Formulera och bevisa integralkriteriet för serier. (6 p)

8. Visa att (5 p)

$$\frac{\pi}{e} \leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{\sin(x)} dx \leq \pi e$$

Lycka till!

/Hossein

Formelblad

Trigonometriska formler

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$ $\quad$ $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$ $\quad$ $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$

$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$ $\quad$ $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$ $\quad$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ $\quad$ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Maclaurinserier

$$
\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{x^1}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots && \text{för alla } x \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^k \frac{x^k}{k} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
\arctan x &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \cdots && \text{när } |x| < 1 \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k} x^k + \cdots && \text{när } |x| < 1
\end{aligned}
$$