Tentamen i matematisk analys TMV138/TMV181, 20170111, 08.30-12.30

tel 031 772 5892/0708 948 456. Lärare: Reimond Emanuelsson

Hjälpmedel: Chalmersgodkänd miniräknare

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{3x+1}\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^2 x\,dx.$

   (c) $\displaystyle\int \ln(x+1)\,dx.$

   3p, 3p, 3p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $xy'(x) + y(x)^2 = 0.$ (b) $2y(x) - y'(x) = e^{2x}$, $y(0) = 1.$

   (c) $x \cdot y''(x) + y'(x) = 0,$ $y(1) = 0$ $y'(1) = 1.$

   3p, 3p, 4p

3. Funktionen $h(x) = \ln(2x+1)\arctan\left(x^2\right)$ är given.

   (a) Bestäm Maclalaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3 med resttermen på Ordoform. 4p

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x) - 2x^3}{x^4}$ 1p

4. (a) Beräkna $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{e}{\pi}\right)^n.$ 2p

   (b) Beräkna $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{24}{(k+1)(k+3)}.$ 2p

   (c) Visa olikheten $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1}} \geq \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx.$ 4p

   (d) Motivera att serien och integralen i (c) är konvergenta. 2p

5. Givet ytan som begränsas av $y = \dfrac{\ln x}{x}$, $y = 0$, samt linjerna $x = 1$ och $x = a$.

   (a) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring $x-$axeln med $a = \infty$. 3p

   (b) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring $y-$axeln med $a = e$. 3p

6. Avgör för vilka x som följande serie är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2x}{3}\right)^n.$$

   6p

7. Formulera och bevisa Integralkalkylens medelvärdessats (Enklare varianten). 6p

---

Maximal poäng på tentamen är 50 p. Låt P vara erhållen poängsumma och B erhållen bonuspoäng.

Betyg U (underkänt), om $P + B < 20$.

Betyg 3, om $20 \leq P + B < 30$.

Betyg 4, om $30 \leq P + B < 40$.

Betyg 5, om $40 \leq P + B$.

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y} \\
\sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$