Lösningsförslag till Tentamen i matematisk analys TMV138/TMV181, 20170111, 08.30-12.30

1. Beräkna följande integraler...

   (a)
$$\int_0^5 \frac{1}{3x+1}\,dx = \frac{1}{3}\left[\ln(3\cdot 5+1) - \ln(3\cdot 0+1)\right] = \frac{4\ln 2}{3}.$$

   (b)
$$\int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

   (c)
$$\int \ln(x+1)\,dx = \{\text{P.I.}\} = (x+1)\ln(x+1) - \int (x+1)\cdot\frac{1}{x+1}\,dx = (x+1)\ln(x+1) - x + C.$$

3p, 3p, 3p

2. Lös differentialekvationerna...

   (a)
$$xy' + y^2 = 0 \Longleftrightarrow \frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y^2} \Longleftrightarrow \ln x + C = \frac{1}{y} \Longleftrightarrow y = \frac{1}{\ln x + C}.$$
   Randvillkoret $y(e) = 1$ ger
$$1 = \frac{1}{1+C} \Longrightarrow C = 0 \text{ så att } y = \frac{1}{\ln x}.$$

   (b)

   $2y - y' = e^{2x}$. Multiplikation med I.F. $= e^{-2x}$: $(y\cdot e^{-2x})' = -1 \Longleftrightarrow y\cdot e^{-2x} = -x + C \Longleftrightarrow y = (C-x)e^{2x}$.

   Villkoret $y(0) = 1$ ger att $1 = C$, d.v.s. $y = (1-x)e^{2x}$.

   (c)

   $x\cdot y''(x) + y'(x) = 0$. Sätt $y' = z \Longrightarrow xz' + z = 0 \Longleftrightarrow (xz)' = 0 \Longleftrightarrow xz = C_1 \Longleftrightarrow y' = z = \dfrac{C_1}{x} \Longleftrightarrow y = C_1\ln x + C_2$

   ,
$$y(1) = 0 \quad y'(1) = 1 \text{ ger } C_2 = 0 \text{ och } \frac{C_1}{1} = 1 \Longleftrightarrow C_1 = 1. \text{ Svar: } y = \ln x.$$

3p, 3p, 4p

3. Funktionen $h(x) = \ln(2x+1)\cdot\arctan\left(x^2\right)$ är given.

   (a) Bestäm Maclalaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 3 med resttermen på Ordoform utvesklar vi till ordning 4 p.g.a. (b)-uppgiften:
$$2x^3 - 2x^4 + \mathcal{O}\left(x^5\right) = 2x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

4p

   (b) För gränsvärdet behövs utveckling till ordning 4:
$$\lim_{x\to 0}\frac{h(x) - 2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{2x^3 - 2x^4 + O\left(x^5\right) - 3x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-2 + O\left(x^1\right)}{1} = -2.$$

1p

4. (a) Beräkna summan...
$$\sum_{n=2}^{m}\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n = \{\text{Konv geom. serie med } x = -e/\pi\} = \left(\frac{e}{\pi}\right)^2\sum_{n=0}^{m-2}\left(-\frac{e}{\pi}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{e}{\pi}\right)^2\cdot\frac{1-(-e/\pi)^{m-1}}{1+e/\pi} \to \frac{e^2}{\pi(e+\pi)} \text{ då } m \longrightarrow \infty.$$

2p

   (b) Beräkna summan...
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{24}{(k+1)(k+3)} = \{\text{PBU}\} = 12\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right] =$$
$$= 12\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \right.$$
$$\left.\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right] =$$
$$= 12\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right] \to 12\cdot\frac{7}{12} = 7 \text{ då } n \to \infty.$$

2p

(c) Visa olikheten $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k^3+1}} \geq \int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$...

Funktionen $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3+1}}$ år avtagande pÂ intervallet $[0,\infty)$. Alltså är $f(x) \leq f(k)$ för $k \leq x \leq k+1$. Det betyder att

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k),\ k = 0,1,2,3\ldots \text{ så att } \sum_{k=0}^{n}\int_0^n f(x)dx = \int_0^n f(x)dx \leq \sum_{k=0}^{n} f(k).$$

Låt nu $n \longrightarrow \infty$ och olikheten är visad. 4p

(d) Motivera att serien och integralen i (c) är konvergenta...
Vi börjar med serien som ju är störst.

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{k^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \frac{1}{k^{3/2}}.$$

Således är serien konvergent ty $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ konvergent. Nu är integranden ≥ 0, så att integralen, som ju är mindre än serien, är också kovergent. 2p

5. Givet ytan som begränsas av $y = \frac{\ln x}{x}$, $y = 0$, samt linjerna $x = 1$ och $x = a$.

(a) Beräkna volymen som genereras då ytan, roterar kring $x-$axeln med $a = \infty$...

$$\begin{aligned}\pi\int_1^{\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx &= = \{\text{V.S } \ln x = t,\ x = e^t \to dx = e^t dt\} = \pi\int_0^{\infty} t^2 e^{-t} dt = \\ &= \pi\left[(t^2+2t+2)e^{-2t}\right]_{\infty}^{0} = \pi\lim_{b\to\infty}\left(2-(b^2+2b+2)e^{-2b}\right) = 2\pi\end{aligned}$$

3p

(b) Volymen som genereras då ytan, som begränsas av ytan ovan roterar kring $y-$axeln med $a = e$ är

$$2\pi\int_1^e x\frac{\ln x}{x}dx = \{\text{P.I.}\} = 2\pi[x\ln x - x]_1^e = 2\pi.$$

1.0p

6. Avgör för vilka x som följande serie är absolutkonvergent, betingat konvergent respektive divergent...

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2x}{3}\right)^n\ldots$$

Kvottestet:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left|\frac{2x}{3}\right|\begin{cases} < 1 \text{ om } |x| < 3/2 \text{ och alltså absolutkonvergent.} \\ = 1 \text{ om } |x| = 3/2 \text{ divergent, se nedan!} \\ > 1 \text{ om } |x| > 3/2 \text{ och alltså divergent.}\end{cases}$$

För $x = \pm 3/2$ blir seriens termer ∓ 1 och termerna går inte mot 0, då $n \to \infty$. Alltså divergens då $|x| = 3/2$. 6p

7. Formulera och bevisa Integralkalkylens medelvärdessats (Enklare varianten)...
Antag $f(x)$ kontinuerlig i intervallet $[a,b]$, med $a < b$. Då finns $\xi \in [a,b]$, sådant att

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Bevis:
Eftersom $f(x)$ kontinerlig finns ett största värde $f_{\max}$ och ett minsta värde $f_{\min}$av f i $[a,b]$, enligt satsen om minsta och största värde. Det betyder att

$$f_{\min} \leq f(x) \leq f_{\max} \text{ som ger att } (b-a)f_{\min} \leq \int_a^b f(x)dx =: I \leq (b-a)f_{\max}$$

som i sin tur ger att

$$f_{\min} \leq \frac{I}{b-a} =: y \leq f_{\max}.$$

Då finns, enligt satsen om mellanliggande värde ett $\xi \in [a,b]$, sådant att $f(\xi) = y$, alltså att

$$f(\xi) = y = \frac{I}{b-a} \text{ eller ekvivalent } (b-a)f(\xi) = I = \int_a^b f(x)dx,$$

QED 6p