

Lösningsförslag till Tentamen i matematik TMV 138, 20150114, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x \cdot \sin^3 x \, dx = 0$$

eftersom integranden udda funktion och integrationsintervallet symmetriskt.

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^b (2x-1)e^{-2x} \, dx &= \{P.I.\} = \left[(2x-1)(-1/2)e^{-2x} + \int e^{-2x} \, dx \right]_0^b = \\ &= \left[-xe^{-2x} \right]_0^b = 0 - be^{-2b} \rightarrow 0 \text{ då } b \rightarrow \infty \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{3}{x^2+3x} \, dx &= \left\{ \frac{6}{x^2+3x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{x+3} \right\} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{x}{x+3} \right) \right]_1^b = \\ \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\ln \left(\frac{1}{1+3/b} \right) - \ln \left(\frac{1}{1+3} \right) \right] &= \ln 4. \end{aligned}$$

9p

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$x^2 y'(x) + y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow - \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} = C - \frac{1}{x} \Leftrightarrow y = \frac{x}{Cx-1}$$

Villkoret, $y(1) = -1$, ger att

$$-1 = \frac{1}{C-1} \Leftrightarrow C = 0 \text{ så att } y = -x.$$

(b) $y''(t) - 4y(t) = 4e^{2t}$ har karakt. ekv. $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2$, så att $y_h = Ae^{2t} + Be^{-2t}$. Eftersom HL ingår i y_h , sätt $y = u(t)e^{2t}$. Då är

$$y' = (u' + 2u)e^{2t} \text{ och } y'' = (u'' + 4u' + 4u)e^{2t}.$$

DE:n blir därmed

$$\begin{aligned} y'' - 4y &= (u'' + 4u' + 4u)e^{2t} - 4ue^{2t} = (u'' + 4u')e^{2t} = 4e^{2t} \Leftrightarrow u'' + 4u' = 4 \\ \Leftrightarrow u' + 4u &= 4t + C_1 \Leftrightarrow (e^{4t}u)' = (4t + C_1)e^{4t} \\ \Leftrightarrow e^{4t}u &= e^{4t}(t + C_2) + C_3 \Leftrightarrow u = (t + C_2) + C_3e^{-4t} \Leftrightarrow y = (t + C_2)e^{2t} + C_3e^{-2t} \text{ (Svar)} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} t y'(t) + y(t) &= (t y(t))' = 4t \ln t \Leftrightarrow \\ t y &= 4 \int t \ln t \, dt = 2t^2 \ln t - 2 \int t^2 \cdot \frac{1}{t} \, dt = 2t^2 \ln t - t^2 + C \Leftrightarrow y = 2t \ln t - t + \frac{C}{t}. \\ y(1) = -1 &\implies 2 \cdot 0 - 1 + \frac{C}{1} = -1 \Leftrightarrow C = 0 \text{ så att } y = 2t \ln t - t. \end{aligned}$$

9p

3. Givet funktionen $h(x) := \ln(x^2 + 1) \cdot (\arctan x)^2$.

(a) och (b) Maclaurinutvecklingen av $h(x)$ av ordning 6:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 + 1) &= x^2 - \frac{x^4}{2} + \mathcal{O}(x^6) \\ (\arctan x)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5) \right)^2 = x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{9} + \mathcal{O}(x^6) = x^2 - 2 \cdot \frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6) \\ h(x) &= x^4 + x^6 \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \mathcal{O}(x^8) \Rightarrow \frac{x^4 - h(x)}{x^6} = \frac{7}{6} + \mathcal{O}(x^2) \rightarrow \frac{7}{6} \text{ då } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

6p

4. (a) Serien $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k$ är konvergent eftersom $0 \leq a_k := \left(\frac{2}{k}\right)^k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k =: b_k$ för $k = 3, 4, \dots$

och serien $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ är en konvergent geometrisk serie, eftersom $|2/3| < 1$.

(b) (Visa att $1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2$ med lämplig integraluppskattning.)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \int_1^n \frac{1}{x^2} \, dx = 1 \text{ eftersom summan är en översumma.}$$

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \geq \int_1^n \frac{1}{x^2} \, dx = 1 \text{ eftersom summan är en undersumma.}$$

Alltså får vi

$$1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + 1 = 2 \text{ v.s.v.}$$

(c) Summan av serien $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{3}{j(j+3)}$ kräver samma PBU, som 1 (c):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{j} - \frac{1}{j+3} \right) &= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \dots \\ &+ \frac{1}{n-3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \rightarrow 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \end{aligned}$$

då $n \rightarrow \infty$.

8p

5. Givet kurvan $(x(t), y(t)) = (t + \sin t, \cos t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

(a) Längden av kurva är

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1 + \cos t)^2 + (-\sin t)^2} dt = \int_0^{\pi/2} \sqrt{2 + 2 \cos t} dt = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\cos^2(t/2)} dt = 2 \int_0^{\pi/2} \cos(t/2) dt = 4[\sin(t/2)]_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

(b) Områdets area är

$$A = \int_{t=0}^{\pi/2} y dx = \int_0^{\pi/2} y(t)x'(t) dt = \int_0^{\pi/2} \cos t(1 + \cos t) dt = \left[\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

6p

6. (a) V.S. innebär att $\int f(x) dx = \int f(x(t)) x'(t) dt$ med variabelsubstitutionen $x = x(t)$.

(b) Lämpliga villkor på funktionerna $f(x)$ och $x(t)$ är att $f(x)$ och $x'(t)$ kontinuerliga.

5p

7. Betrakta integralen $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx \dots$

(a) Integralen är generaliserad eftersom I) integranden är obegränsad i $x = 1$ och II) obegränsat integrationsintervall.

(b) Beräkna integralen...

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx &= \left\{ \begin{array}{l} \text{V.S.} \quad t = \sqrt{x^2 - 1}, x = \sqrt{t^2 + 1} \Rightarrow dx = \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + 1}} \\ x - \text{gränser} \quad 1 \leq x < \infty \\ t - \text{gränser} \quad 0 \leq t < \infty \end{array} \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)t} \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt. \end{aligned}$$

Vi bröjar med en liknande integral och integrerar partiellt

$$\begin{aligned} h(t) &:= \int 1 \cdot \frac{1}{(t^2 + 1)^{1/2}} dt = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} - \int t \cdot (-1/2) \cdot \frac{2t}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt = \\ &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + \underbrace{\int \frac{t^2 + 1}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt}_{=h(t)} - \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt \\ \Leftrightarrow \int \frac{1}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt &= \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} + C \Rightarrow \int_0^b \frac{1}{(t^2 + 1)^{3/2}} dt = \left[\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}} \right]_0^b = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + 1/b^2}} \rightarrow 1 \text{ då } b \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

7p