Tentamen i matematik TMV 138, 2010405, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	Jacob Leander, tel 0703-088304
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2012, LP2

Fullständiga lösningar krävs med svaren förenklade så långt som möjligt.

1. Beräkna följande integraler.

   (a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{5}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx,$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\pi} 3\cos^2 t\,dt,$

   (c) $\displaystyle\int \frac{3x^2+x+2}{x^2+x}\,dx.$

   (d) En av integralerna är generaliserad. Vilken? Motivera!

   9p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $y'(x) = y(x)^2 + 1, \quad y(0) = 1,$

   (b) $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 0\,, y'(0) = 2\,,$

   (c) $t\,y'(t) + 2\,y(t) = \dfrac{e^{2t}}{t}\,.$

   8p

3. Givet funktionen $h(x) := \tan^2 x\,(e^{2x} - 1)$.

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x)$ av grad 3.

   (b) Beräkna gränsvärdet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{h(x)}{x^3}$.

   5p

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\,\sqrt{k}}{(k+1)^2},$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2+3k+2},$ (c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} 10^{-j} e^{2j}.$

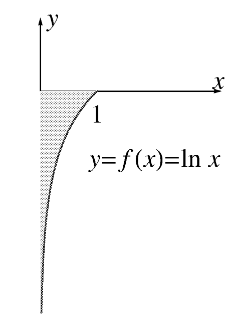
   8p

5. Givet funktionen $f(x) = \ln x$, $0 < x \le 1$.
   I (a) och (b) betraktas området, som begränsas av $y = f(x)$, $y = 0$, där $0 < x \le 1$, se figur.
   Beräkna i (a) och (b) volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring

   (a) $x-$axeln,

   (b) $y-$axeln.

   (c) Kurvan $y = \ln x$, där $0 < x \le 1$ roterar kring $y-$axeln och genererar på så sätt en yta. Beräkna ytans area.

   Figur till uppgiften

   9p

6. (a) Skriv upp en formel för partiell integration av en obestämd integral.

   (b) Vilka antaganden skall man göra på funktionerna i (a)?

   (c) Bevisa formeln i (a) under antagandena i (b).

   5p

7. (a) Motivera att integralen $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x\,\sqrt{x^3+1}}\,dx$ är konvergent.

   (b) Beräkna integralen i (a).

   6p

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$