

Tentamen i matematik TMV 138, 20121219, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefonvakt:	Reimond Emanuelsson, 0708-948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p. Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2012, LP2

1. Beräkna följande integraler

(a) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9}} dx,$

(b) $\int_0^\pi 3 \cos^3 t dt,$

(c) $\int \frac{2x^2 + x + 2}{x^3 + x} dx.$

8p

2. Lös differentialekvationerna

(a) $y'(x) = e^{-y(x)}, \quad y(0) = 1,$

(b) $y''(t) + 4y(t) = 8t + 4,$

(c) $ty'(t) - 2y(t) = 2t^3 e^{2t}, \quad y(1) = 0.$

8p

3. Givet funktionen $h(x) := e^{\sin x}.$

(a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x)$ av grad 4.

(b) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1 - x}{\sin^2 x}.$

6p

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.

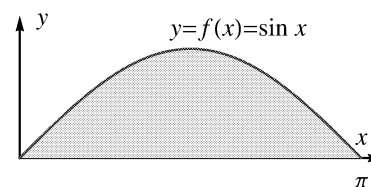
(a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{(k+1)^2},$ (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + 2k},$ (c) $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \left(\frac{e}{\pi}\right)^j.$

8p

5. Givet funktionen $f(x) = \sin x, 0 \leq x \leq \pi$ och området i planet, som begränsas av $y = f(x), y = 0, x = 0$ och $x = \pi,$ se figur. Beräkna volymen av rotationskroppen, som genereras då området roterar kring

(a) x -axeln,

(b) y -axeln.



Figur till uppgiften

6p

6. (a) Vad menas med att serien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är betingat konvergent?

(b) Ge ett exempel på en betingat konvergent serie.

(c) Formulera Leibnizs kriterium för en serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$

5p

7. (a) Beräkna integralen $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \sin x}.$

(b) Beräkna integralen $\int_0^\pi \frac{x dx}{1 + \sin x}.$

9p

Trigonometriska formler

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \sin y = \sin(x + y) - \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$