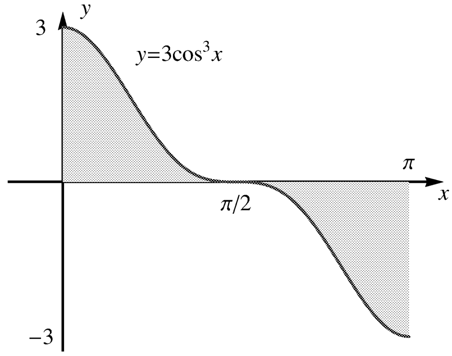
Lösningsförslag till tentamen i matematik TMV 138, 20121219, onsdag f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \left[\ln(x+\sqrt{x^2+9})\right]_0^4 = \ln(4+5) - \ln(0+3) = \ln 3\,.$$



$$3\int_0^\pi \cos^3 x\,dx = 3\int_0^\pi (1-\sin^2 x)\cos x\,dx =$$

(b) $\left[3\sin x - \sin^3 x\right]_0^\pi = 0\,,$

eller p.g.a. att integranden är "udda"

kring $x = \pi/2$ blir integralen 0.

(c)

$$\int \frac{2x^2+x+2}{x^3+x}\,dx = \left\{\text{PBU: } \frac{2x^2+x+2}{x^3+x} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{x}\right\} = \arctan x + 2\ln x + C\,.$$

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$y'(x) = e^{-y(x)}, \quad y(0) = 1$$

Variabelseparation

$$\int e^y\,dy = \int dx \Longleftrightarrow e^y = x + C, \quad y(0) = 1 \text{ som ger } e^1 = 0 + C \Longleftrightarrow C = e\,.$$

Vi får alltså att $y = \ln(x+e)$.

(b)

$$y''(t) + 4y(t) = 8t + 4$$

$y_h: \quad r^2 + 4 = 0 \Longleftrightarrow y_h = A\sin 2t + B\cos 2t$

$y_p = \quad y_p = At + B \Rightarrow y_p'' + 4y_p = 0 + 4At + 4B = 8t + 4 \Longleftrightarrow y = y_h + y_p = A\sin 2t + B\cos 2t + 2t + 1$

(c)

$$\Longleftrightarrow y' - \frac{2}{t}y(t) = 2t^2e^{2t}, \quad \text{I.F.} = e^{-2\ln t} = \frac{1}{t^2}\,.$$

Multiplikation med I.F. ger

$$\left(\frac{1}{t^2}\cdot y\right)' = 2e^{2t} \Longleftrightarrow \frac{1}{t^2}\cdot y = e^{2t} + C \Longleftrightarrow y = t^2e^{2t} + Ct^2\,.$$

Randvillkoret ger

$$0 = 1^2\cdot e^2 + C\cdot 1^2 \Longleftrightarrow C = -e^2 \text{ så att } y = \left(e^{2t} - e^2\right)t^2\,.$$

3. (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $h(x) := e^{\sin x}$ av grad 4... Nu är $z := \sin x = 0$, om $x = 0$, så vi bestämmer Maclaurinpolynomet av e^z av tillräckligt hög grad. Eftersom $z = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...$ räcker det att betrakta Maclaurinpolynomet av grad 4 av e^z.

$$\begin{aligned} e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{6}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right)^3 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ...\right)^4 + ... = \\ &= 1\cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right)x^3 + \left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left[-\frac{1}{6}\right] + \frac{1}{24}\right)x^4 + ... = \\ &= 1 + x + x^2/2 - x^4/8 + ... \text{ Alltså är polynomet } 1 + x + x^2/2 - x^4/8. \end{aligned}$$

(b)

$$\frac{h(x) - 1 - x}{\sin^2 x} = \frac{1 + x + x^2/2 - x^4/8 + ... - 1 - x}{x^2 + ...} = \frac{x^2/2 + ...}{x^2 + ...}\cdot\frac{1/x^2}{1/x^2} =$$

$$\frac{1/2 + ...}{1 + ...} \to \frac{1}{2} \text{ då } x \to 0 \text{ (Svar (b))}\,.$$

4. (Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna också summan av de serier som är konvergenta.)

(a) Sätt $a_k = \frac{2k}{(k+1)^2}$. Jämför med ex.vis $b_k = \frac{1}{k}$.

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{2k^2}{(k+1)^2} = \frac{2}{(1+1/k)^2} \longrightarrow 2 \text{ då } k \longrightarrow \infty$$

och $0 < 2 < \infty$, och eftersom $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ är divergent, är även $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$, en konvergent teleskopsumma. Konvergent ty $a_k := \dfrac{1}{k^2+2k} \leq \dfrac{1}{k^2} =: b_k$ och $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent.

$$\frac{1}{k^2+2k} = \{\text{PBU}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) \text{ och partialsumman } \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \longrightarrow \frac{3}{4} \text{ då } n \to \infty\,.$$

(c) $-\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{e}{\pi}\right)^j$ är en konvergent geometrisk serie eftersom $\left|-\dfrac{e}{\pi}\right| < 1$. Seriens summa är

$$\frac{e}{\pi} \cdot \frac{1}{1+e/\pi} = \frac{e}{\pi+e}\,.$$

5. (a) Volymen är med skivmetoden

$$\int_0^{\pi} \pi f(x)^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2} \text{ v.e.}.$$

(b) Volymen är med skalmtetoden

$$\int_0^{\pi} 2\pi x\, f(x) dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x\, dx = \{\text{P.I.}\} = 2\pi([x \cdot (-\cos x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\, dx) =$$

$$2\pi^2 + [\sin x]_0^{\pi} = 2\pi^2\,.$$

6. (a) En serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ är betingat konvergent, om den är konvergent men $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ är divergent. Alternativt kan man säga att serien är konvergent men inte absolutkonvergent.

(b)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ är betingat konv. eftersom $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right|$ div. men $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konv. enl. Leibnizs kriterium.

(c) En serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, sådan att $a_k \cdot a_{k+1} < 0$ för $k = 1, 2, \ldots$ och $|a_k|$ *avtar* mot 0, då $k \longrightarrow \infty$ är konvergent.

7. (a)

$$I := \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} = \left\{\begin{array}{lll} t = \tan(x/2), & x = 2\arctan t, & \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}, & x - \text{gränser: } 0\,, & \pi \\ \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}, & t - \text{gränser: } 0\,, & \infty \end{array}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{2dt}{t^2+2t+1} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{2}{(t+1)^2} = \left[-\frac{2}{t+1}\right]_0^{\infty} = 2\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \frac{1}{1+\sin x}\, dx &= \{\text{P.I.}\} = \left[-x \cdot \frac{2}{1+\tan(x/2)}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2dx}{1+\tan(x/2)} = \{t = \tan(x/2)\} = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{(1+t)} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \{\text{PBU}\} = \int_0^{\infty} \left(\frac{2}{t+1} - \frac{2(t-1)}{t^2+1}\right) dt = \\ &= \left[\ln \frac{(t+1)^2}{t^2+1} + 2\arctan t\right]_0^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \left[(\ln \frac{(1+1/b)^2}{1+1/b} + 2\arctan b)\right. \\ &- \left.(\ln \frac{(0+1)^2}{0^2+1} + 2\arctan 0)\right] = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\,. \end{aligned}$$

$$\text{eller } J := \int_0^{\pi} x \cdot \frac{dx}{1+\sin x} = \{\text{V.S. } x = \pi - t\} = \int_{\pi}^{0} (\pi - t) \cdot \frac{(-dt)}{1+\sin(\pi - t)} =$$

$$\pi I - J \Longleftrightarrow 2J = \pi I \Longleftrightarrow J = \frac{\pi}{2} I = \pi\,.$$