Lösningsförslag till tentamen i matematik TMV 135, 20110826, f.m.

1. Beräkna följande integraler...

(a)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,dx = \{\text{PBU}\} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \left[\ln \frac{x}{x+1}\right]_1^2 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

(b)

$$\int 4x \ln x\,dx = 2x^2 \ln x - \int 2x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx = 2x^2 \ln x - x^2 + C\,.$$

(c)

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \{\sqrt{x} = t,\ x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt\} = \int \frac{e^t}{t}\, 2t\,dt = 2\int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C\,.$$

2. Lös differentialekvationerna...

(a)

$$y'(x) + x\,y(x)^2 = 0 \Leftrightarrow \int x dx = -\int \frac{dy}{y^2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + C = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{2}{x^2+C}\,.$$

Villkoret $y(0) = 2$, ger att $C = 1$, så att $y = \dfrac{2}{x^2+1}$.

(b)

$$xy'(x) = y(x) + 1 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \{\text{I.F.} = e^{-\ln x} = 1/x\} \Leftrightarrow$$

$$(y/x)' = 1/x^2 \Leftrightarrow \frac{y}{x} = -\frac{1}{x} + C \Leftrightarrow y = -1 + C\,x, \quad y(1) = -1 \Rightarrow C = 0 \text{ så att } y(x) = -1\,.$$

(c)

$y''(t) + 4y'(t) = 0 \Rightarrow y = y_h = A + Be^{-4t}$. $\quad y_p = Ce^{-2t} \Rightarrow 4Ce^{-2t} - 8Ce^{-2t} = 8e^{-2t} \Leftrightarrow C = -2$.
$y = A + Be^{-4t} - 2e^{-2t}$.

3. Funktionerna $f(x) = x^3 \sin x - x^2$ och $g(x) = 1 - e^{x^2}$...

(a) Gränsvärdet

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3(x - x^3/6 + \ldots) - x^2 - (-x^2 - x^4/2! - \ldots)}{x^4} = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4(1 + 1/2) + A_5 x^5 + A_6 x^6 + \ldots}{x^4} = \frac{3}{2}\,.\end{aligned}$$

(b) Maclaurinpolynomet av

$$f(x)\cdot g(x) = (x^3(x - x^3/6 + \ldots) - x^2)((-x^2 - x^4/2! - \ldots)) = x^4 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^8}{2} + \ldots$$

Maclaurinpolynomet är $x^4 - \dfrac{x^6}{2}$.

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.

(a) En geometrisk serie med kvot $3/4$ och alltså konvergent:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-2n} \cdot 3^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1 - (3/4)} = \ldots = 4\,.$$

(b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n+1}{n^3 - n} = \{\text{PBU}\} = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1\,,$$

och alltså konvergent.

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3-n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$, som är en divergent serie (Harmoniska serien).

5. (a)

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} &= \left\{\sqrt{e^x+1} = t \Leftrightarrow x = \ln(t^2-1),\ dx = \frac{2t\,dt}{t^2-1}\right\} = \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{2}{t^2-1}\,dt = \\ &= \ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)_{\sqrt{2}}^{\infty} = \lim_{t\to\infty} \ln\left(\frac{1-1/t}{1+1/t}\right) - \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \\ &= 0 + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}\right) = 2\ln(1+\sqrt{2})\,.\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int 1\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx = \\ &= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+1}}dx + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx \\ &\Leftrightarrow \int 1\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln(x + \sqrt{x^2+1})\right) + C\,.\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\,dx = \left[x\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\,.$$

6. (För vilka reella konstanter α är integralen konvergent...)

$$\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln b, & \text{om } \alpha = 1 \\ \\ \dfrac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1), & \text{om } \alpha \neq 1\,. \end{cases}$$

För $\alpha > 1$, konvergerar $\dfrac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$ mot $\frac{1}{\alpha-1}$, då $b \to \infty$. För $\alpha < 1$ divergerar $\dfrac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1)$ mot ∞, då $b \to \infty$. Till sist, för $\alpha = 1$, så divergerar integralen $\ln b - 1$ mot ∞.

7. $x'(t) = -3\sin t\,\cos^2 t$ och $y'(t) = 3\cos t\,\sin^2 t$. Längden

$$\begin{aligned} L &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt = 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{9(\sin^2 t + \cos^2 t)\cos^2 t\,\sin^2 t} dt = \\ &= 12 \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t\, dt = 3\left[-\cos 2t\right]_0^{\pi/2} = 3(1-(-1)) = 6\,. \end{aligned}$$