Tentamen i matematik TMV 135, 20110429, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefon:	Reimond Emanuelsson, 772 5888/0708 948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2010, LP2

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_2^4 \frac{(x+1)^2}{x-1}\,dx,$

   (b) $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx,$

   (c) $\displaystyle\int \sin\sqrt{x}\,dx.$

   9p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $y'(x) = 2x\cdot y(x), \quad y(0) = 1,$

   (b) $\dfrac{y'(x)}{y(x)^2} = 2x, \quad y(0) = 1,$

   (c) $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t}$

   8p

3. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}\,.$$
   4p

4. Givet $f(x) = \sin(x^2)$ och $g(x) = e^x$.

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $f(x)\cdot g(x) =: h(x)$ av grad 6.

   (b) Bestäm $h^{(6)}(0)$.

   6p

5. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.

   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n},$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n},$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(2/5)^n.$

   7p

6. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}.$

   (b) Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1}$ är konvergent eller divergent. 6p

7. Ange identiteten/formeln för partiell integration för en obestämd integral. 4p

8. Bestäm längden av kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \pi$. 6p

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \, \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$