Lösningsförslag till tentamen i matematik TMV 135, 20110429, f.m.

1. (a)

$$\int_2^4 \frac{(x+1)^2}{x-1}\,dx = \int_2^4 \left(x+3+\frac{4}{x-1}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2}+3x+4\ln(x-1)\right]_2^4 = \ldots = 4(3+\ln 3)\,.$$

(b)

$$\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = e\ln e - e - (1\ln 1 - 1) = 1\,.$$

(c)

$$\int \sin\sqrt{x}\,dx\{x=t^2\} = 2\int t\sin t dt = 2(-t\cos t + \int \cos t dt) = 2(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}) + C\,.$$

2. (a)

$$y'(x) = 2x\cdot y(x) \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = 2\int x dx \Leftrightarrow \ln y = x^2 + C \Leftrightarrow y = C_1 e^{x^2}\,.$$

Villkoret $y(0)=1$ ger att $C_1 = 1$, så att $y = e^{x^2}$.

(b)

$$\frac{y'(x)}{y(x)^2} = 2x \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 2\int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{C-x^2}$$

Villkoret $y(0)=1$ ger att $C=1$, så att $y = \dfrac{1}{1-x^2}$.

(c) Karakteristisk ekvation till $y''(t) - 4y(t) = 3e^{-t}$ är $r^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow r = \pm 2$, så att $y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t}$. $y_p = Ce^{-t} \Rightarrow y_p'' = Ce^{-t}$. Insatt i DE:n får vi

$$y_p'' - 4y_p = 3Ce^{-t} = 3e^{-t} \Rightarrow C = 1\,.$$

$y = y_h + y_p = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} + e^{-t}$.

3. Gränsvärdet är av typ "$\frac{0}{0}$". Vi derivering av täljare och nämnare fås

$$\frac{1-\cos x}{3x^2}\,,\ \frac{-\sin x}{6x}\,,\ \frac{\cos x}{6} \to \frac{1}{6}\,.$$

Svar: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$.

(a)

$$f(x) = x^2 - x^6/6 + \ldots,\quad g(x) = 1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24 + \ldots \Rightarrow f(x)g(x) = x^2 + x^3 + x^4/2 + x^5/6 - x^6/8 + \ldots$$

Maclaurinpolynomet av $f(x)\cdot g(x) =: h(x)$ av grad 6 är alltså $x^2 + x^3 + x^4/2 + x^5/6 - x^6/8$.

(b) $h^{(6)}(0) = -6!\cdot\frac{1}{8} = -90$.

4. Vilken/vilka av följande serier är konvergenta? Beräkna summan av de serier som är konvergenta.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

och alltså konvergent.

(b) Vi jämför $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$ med

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x} = [\ln(\ln x] = \infty,$$

och alltså divergent (Integralkriteriet).

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,(2/5)^n$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = .f(x),\, \|x| < 1\,.$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = D\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,(2/5)^n == \frac{25}{9}\,.$$

5. (a)

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} = -\int \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^{\infty} = \ln 2$$

(b) Avgör om integralen $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{e^x+1}$ är konvergent eller divergent.

$$0 \le \frac{x\,dx}{e^x+1} \le xe^{-x} \text{ och } \int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \ldots = 1\,.$$

Alltså är integralen ovan konvergent. 6p

6. Teori 6p

7. Längden av kurvan $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)) = (2\cos t, \cos 2t)$, $0 \le t \le \pi$ ges av

$$\int_0^\pi \sqrt{(2\sin t)^2 + (2\sin 2t)^2}\,dt = \int_0^\pi \sin t\sqrt{1 + (2\cos t)^2}\,dt = \{2\cos t = u\} =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \sqrt{1+u^2}\,du = \int_0^2 1\cdot\sqrt{1+u^2}\,du = \{\text{P.I.}\} =$$

$$\left[u\sqrt{1+u^2}\right]_0^2 - \int \frac{1+u^2}{\sqrt{1+u^2}}\,du + \int_0^2 \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^2 1\cdot\sqrt{1+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\left[u\sqrt{1+u^2}\right]_0^2 + \left[\tfrac{1}{2}\ln(u+\sqrt{1+u^2})\right]_0^2 =$$

$$= 2\sqrt{5} + \ln\left(2+\sqrt{5}\right)$$

6p

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$