Tentamen i matematik TMV 135, 20101215, f.m.

Hjälpmedel:	Inga, formelsamling finns på baksidan
Telefon:	Reimond Emanuelsson, 772 5888/0708 948 456
Betygsgränser:	För godkänt krävs minst 20 p.
	Betyg 3: 20-29 p, betyg 4: 30-39, betyg 5: 40-50 p
Bonuspoäng:	Från duggor under HT 2010, LP2

1. Beräkna följande integraler

   (a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+2)}\,dx,$

   (b) $\displaystyle\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

   8p

2. Lös differentialekvationerna

   (a) $y'(x) = 2x \cdot y(x)^2, \quad y(0) = 1$

   (b) $y''(t) + 4y(t) = 8e^{-2t}$

   8p

3. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{(x-1)^2}\,.$$

   4p

4. Givet $f(x) = e^{-2x}\ln\left(x^2+1\right)$.

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av $f(x)$ av grad 5.

   (b) Bestäm $f^{(5)}(0)$.

   6p

5. Vilken/vilka av följande serier är absolutkonvergenta, betingat konvergenta respektive divergenta? Motivering krävs!

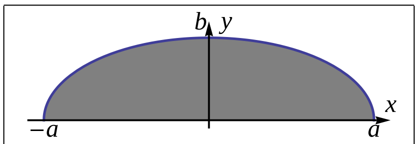
   (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n}},$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \tan(1/n),$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n.$

   6p

6. Givet två konstanter $a > 0$ och $b > 0$. Kurvan $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad y \geq 0,$ linjen $y = 0$, $x = -a$ och $x = a$ begränsar ett område i planet, se figur. Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då området roterar kring $x-$axeln.



Kurvan $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad y \geq 0$ och

området $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leq 1, \quad y \geq 0$

   6p

7. Visa att om $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ är konvergent, så gäller att $a_n \to 0$, då $n \to \infty$. 6p

8. Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{e^x + e^{-x}}\,dx$$

   6p

Trigonometriska formler

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\
2\cos x \cos y &= \cos(x-y) + \cos(x+y) \\
2\cos x \sin y &= \sin(x+y) - \sin(x-y) \\
2\sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\ \tan y} \\
\sin 2x &= 2\sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x
\end{aligned}
$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Några Maclaurinutvecklingar

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\, e^{\xi} \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\,\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi \\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - ... + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)} + (-1)^n\,\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)} \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} + (-1)^n\,\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}} \\
(1+x)^{\alpha} &= 1 + \alpha\, x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}
\end{aligned}
$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$