Lösningsförlag till tentamen i matematik TMV 135, 20101215, f.m.

1. (a)

$$\int_1^2 \frac{3x+2}{x(x+2)}\,dx = \{\text{PBU: } \frac{3x+2}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A}{x(x+2)} \Rightarrow A=1, \quad B=2\} =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x+2}\right) dx = [\ln x + 2\ln(x+2)]_1^2 = \ln\left(\frac{32}{9}\right)$$

$$\int e^{\sqrt{x}}\,dx = \{\sqrt{x}=t,\ x=t^2 \Rightarrow dx = 2tdt\} = \int e^t 2tdt = e^t 2t - \int 2e^t dt = 2e^{\sqrt{x}}\sqrt{x} - e^{\sqrt{x}} + C.$$

2. (a)

$$y'(x) = 2x\cdot y(x)^2 \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2} = 2\int x dx \Leftrightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow y = -\frac{1}{x^2+C}\,.$$

Villkoret $y(0)=1$ ger att

(b) y_h: Karakteristisk ekvation $r^2+4=0 \Leftrightarrow r=\pm 2i \Rightarrow y_h = C_1\cos 2t + C_2 \sin 2t$.

$$y_p = Ce^{-2t} \Rightarrow y_p'' + 4y_p = Ce^{-2t}(4+4) = 8e^{-2t} \Leftrightarrow C = 1\,.$$

Alltså är $y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t + e^{-2t}$. $y''(t) + 4y(t) = 8e^{-2t}$

3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+\cos \pi x}{(x-1)^2}$$

är ett gränsvärde av typ "$\frac{0}{0}$". Sätt $f(x) = 1+\cos\pi x$ och $g(x) = (x-1)^2$. $f'(x) = -\pi \sin \pi x$ och $g'(x) = 2(x-1)$ och ger ett nytt gränsvärde av typ "$\frac{0}{0}$". Ytterligare en derivering ger $f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$ och $g''(x) = 2$. Och

$$\lim_{x\to 1} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-\pi^2 \sin \pi x}{2} \to \frac{\pi^2}{2}$$

då $x \to 1$.

4. Givet $f(x) = e^{-2x}\ln\left(x^2+1\right)$.

(a)

$$e^{-2x}\ln(x^2+1) = (1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + ...)(x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + ...) =$$

$$= x^2 - 2x^3 + \frac{3x^4}{2} - \frac{x^5}{3} + ...$$

Så att Maclaurinpolynomet av $f(x)$ av grad 5 är $x^2 - 2x^3 + \frac{3x^4}{2} - \frac{x^5}{3}$.

(b)

$$f^{(5)}(0)\cdot\frac{x^5}{5!} = -\frac{x^5}{3} \Leftrightarrow f^{(5)}(0) = -40\,.$$

5. (a) Termen a_n har belopp $|a_n| = \frac{1}{n^{3/2}}$ och eftersom $p = 3/2 > 1$, så är serien absolutkonvergent.

(b) Termen $a_n = \tan(1/n) \geq 1/n$, så att serien är divergent. Alternativt,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tan(1/n)}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(1/n)}{1/n}\cdot\frac{1}{\cos(1/n)} = 1\cdot\frac{1}{1} = 1 =: L\,.$$

Eftersom $0 < L \equiv 1 < \infty$ och $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ är divergent, så är den givna serien det också. $\sum_{n=1}^{\infty}\tan(1/n)$,

(c) Termen $a_n = \left(\frac{2}{n}\right)^n < \left(\frac{2}{3}\right)^n$ för $n = 3, 4, ...$ och det sista uttrycket är en term i en konvergent geometrisk serie. Alltså är serien $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$ absolutkonvergent.

6.

$$... \Leftrightarrow y = b\sqrt{1-(x/a)^2} \Rightarrow V = 2\pi\int_0^a y^2 dx =$$

$$2\pi b^2 \int_0^a (1 - x^2/a^2)dx = \left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_0^a = ... = \frac{4\pi a b^2}{3}$$

7. Sätt $\sum_{n=1}^{N} a_n =: S_N$ och $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Då gäller att $S_N \to S$, då $N\to\infty$. Vidare är

$S_N = (a_1 + a_2 + ... + a_{N-1}) + a_N = S_{N-1} + a_N$ eller ekivalent $S_N - S_{N-1} = a_N$.

Vi låter nu $N\to\infty$. Då får vi

$$a_N = S_N - S_{N-1} \to S - S = 0 \text{ då } N\to\infty \text{ v.s.b.}$$

8. Den generaliserade integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2}{e^x+e^{-x}}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{2e^x dx}{e^{2x}+1} = 2\left[\arctan e^x\right]_{-\infty}^{\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi \text{ v.e.}$$