2009 08 21 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Jonatan Vasilis, 0762 72 18 61
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.
Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0809/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

---

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - y = e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$. (6p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$. (6p)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (6p)
   $y'' - 3y' + 2y = e^{5x} \quad y(0) = \frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 2x \arctan x \, dx$. (4p)

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}} \, dx$ (4p)

5. Betrakta funktionen $f(x) = (1 - \cos x^3) \ln(1 + x^3)$. (6p)

   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 15 till $f$.

   (b) Beräkna derivatorna $f^{(n)}(0)$ för $1 \leq n \leq 15$

6. Kalkylen (6p)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2} \, dx = \left[ -\frac{1}{2x+1} \right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

   är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?
   Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

7. En kropp fyller upp området $x + y + z \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ z \geq 0$, (6p)
   dvs tetraedern med hörn i punkterna $(0,0,0), \ (1,0,0), \ (0,1,0), \ (0,0,1)$.
   Kroppens densitet i $(x,y,z)$ är $z \ kg/m^3$. Beräkna dess massa.

8. (a) Beräkna integralen $\displaystyle\int_0^3 x(3-x)e^{(x-1)(x-2)} \, dx$ approximativt med trapetsmetoden, tre delintervall. Ingen feluppskattning krävs. (3p)

   (b) Visa att serien $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^3 - a_n^3)$ är konvergent om och endast om $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar. (3p)

Lycka till! /LF

## Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

## En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är $\xi$ ett tal mellan 0 och $x$.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$