TMV135 2009-08-21 Lösningar

1. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - y = e^x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 0$.

Multiplicera båda leden av denna *linjära differentialekvation* med den *integrerande faktorn* e^{-x} och skriv om vänsterledet som en derivata:

$e^{-x}(y' - y) = e^{-x}e^x \quad \Leftrightarrow \quad (e^{-x}y)' = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}y = x + C \quad \Leftrightarrow \quad y = (x + C)e^x$

$y(0) = 0 \Rightarrow C = 0$ Svar: $\mathbf{y = xe^x}$

---

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 1$.

Differentialekvationen är separabel (men också linjär). Man kan skriva om den så här:

$\dfrac{dy}{y} = x^2\, dx$ och lösningen ges då genom integration: $\displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int x^2\, dx + C$

$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = \dfrac{x^3}{3} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = C' e^{\frac{x^3}{3}}$ Begynnelsevillkoret ger $C' = e^{-\frac{1}{3}}$.

. Svar: $\mathbf{y = e^{\frac{x^3-1}{3}}}$.

---

3. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$ $\quad y(0) = \frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{1}{2}$

Vi bestämmer allmänna lösningen y_h till motsvarande homogena ekvation $y'' - 3y' + 2y = 0$ och därefter hittar vi **en** lösning y_p till den vi har. Alla lösningar till den senare kan då skrivas $y_h + y_p$.
Karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har rötterna $r = 1,\ r = 2$, varmed $y_h = C_1e^x + C_2e^{2x}$
Ansätt $y_p = Ae^{5x}$, vi får då $y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 12Ae^{5x}$, varför $A = \frac{1}{12}$ och $y_p = \frac{1}{12}e^{5x}$.
Allmänna lösningen är alltså $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}$. Begynneslsevillkoren ger slutligen $C_1 = \frac{1}{12},\ C_2 = 0$. Svar: $\mathbf{y = \frac{1}{12}(e^x + e^{5x})}$.

---

4. (a) Beräkna $\displaystyle\int_0^1 2x \arctan x\, dx$.

   (b) Beräkna $\displaystyle\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\, dx$

(a) Använd partiell integration:

$$\int_0^1 2x\arctan x\, dx = [\text{PI}] = [x^2 \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\, dx = \arctan 1 - \int_0^1 (1 - \frac{1}{x^2+1})\, dx =$$
$$= \frac{\pi}{4} - [x - \arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4} - (1 - \frac{\pi}{4}) = \mathbf{\frac{\pi}{2} - 1}$$

(b) Substituera hela rotuttrycket (annars går det att substituera en rot i taget):

$$\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\, dx = \left\{ t = \sqrt{\sqrt{x}+1},\ x = (t^2-1)^2,\ dx = 4t(t^2-1)dt \right\} = \text{Nya gränser!}$$
$$= \int_{\sqrt{3}}^2 4(t^2 - 1)\, dt = \left[4(\frac{t^3}{3} - t) \right]_{\sqrt{3}}^2 = \mathbf{\frac{8}{3}}$$

---

5. Betrakta funktionen $f(x) = (1 - \cos x^3)\ln(1 + x^3)$.
   (a) Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 15 till f.
   (b) Beräkna derivatorna $f^{(n)}(0)$ för $1 \leq n \leq 15$

(a) Tabellen över Maclaurinutvecklingar säger:

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$ och $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + O(t^4)$

Sätt in $t = x^3$ i dessa utvecklingar och vi får:

$f(x) = (1 - (1 - \frac{x^6}{2!} + \frac{x^{12}}{4!} + O(x^{18})))(x^3 - \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{3} + O(x^{12})) = \frac{x^9}{2} - \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{15}}{8} + O(x^{18})$

Maclaurinpolynomet av grad 18 är alltså $\mathbf{\frac{x^9}{2} - \frac{x^{12}}{4} + \frac{x^{15}}{8} + O(x^{18})}$.

(b) Genom att jämföra koefficienterna i Maclaurinpolynomet ovan med det generella uttrycket för dessa, dvs $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, får vi:
$\frac{f^{(9)}(0)}{9!} = \frac{1}{2}$, $\frac{f^{(12)}(0)}{12!} = -\frac{1}{4}$, $\frac{f^{(15)}(0)}{15!} = \frac{1}{8}$.

Svar: $\mathbf{f^{(9)}(0) = \frac{9!}{2}}$, $\mathbf{f^{(12)}(0) = -\frac{12!}{4}}$, $\mathbf{f^{(15)}(0) = \frac{15!}{8}}$. Övriga sökta derivator är noll.

---

6. Kalkylen

$$\int_{-1}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2x+1}\Big]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

är uppenbarligen felaktig, eftersom integranden är positiv. Vad är felet?
Hur borde man ha behandlat integralen och vad blir resultatet?

Felet består i att integranden är odefinierad i $x = -\frac{1}{2}$. För att kunna ge integralen en mening, måste vi dela upp den i två: en från $x = -1$ till $x = -\frac{1}{2}$ och en från $x = -\frac{1}{2}$ till $x = 1$. Dessa båda integraler är alltså odefinierade i varsin ändpunkt och måste betraktas som eventuella gränsvärden av integraler med samma integrand och med en gräns a som inifrån intervallet närmar sig $-\frac{1}{2}$.
T ex $\displaystyle\int_{a}^{1} \frac{2}{(2x+1)^2}\,dx = \Big[-\frac{1}{2x+1}\Big]_{a}^{1} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2a+1}$ som går mot $+\infty$ då $a \to -\frac{1}{2}^{+}$
Även den andra delintegralen blir divergent. Den givna integralen är alltså en divergent integral.

---

7. En kropp fyller upp området $x + y + z \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$, dvs tetraedern med hörn i punkterna $(0,0,0),\ (1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1)$.
Kroppens densitet i (x,y,z) är $z\ kg/m^3$. Beräkna dess massa.

Snittet genom kroppen på höjden z är en triangel mellan x-axeln, y-axeln och linjen $x + y = 1 - z$ (rita!). Dess area är $\frac{(1-z)^2}{2}$, och den har konstant densitet z. Massan av en sådan triangel är därmed $\frac{z(1-z)^2}{2}$ och hela kroppens massa blir då integralen
$\displaystyle\int_0^1 \frac{z(1-z)^2}{2}\,dz = \int_0^1 \frac{z - 2z^2 + z^3}{2}\,dz = \Big[\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{8}\Big]_0^1 = \frac{1}{24}$ Svar: $\mathbf{\frac{1}{24}}$ kg.

---

8. (a) Beräkna integralen $\int_0^3 x(3-x)e^{(x-1)(x-2)}\,dx$ approximativt med trapetsmetoden, tre delintervall. Ingen feluppskattning krävs.

(b) Visa att serien $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}^3 - a_n^3)$ är konvergent om och endast om $\lim_{n\to\infty} a_n$ existerar.

(a) Med $f(x) =$ integranden ovan ger trapetsformeln med tre delintervall:
$I \approx \frac{h}{2}(f(0) + 2f(1) + 2f(2) + f(3)) = \frac{1}{2}(0 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 0) = 4.$ Svar: **4**.

(b) Delsumma nr N är en *teleskopsumma*: $\sum_{n=1}^{N}(a_{n+1}^3 - a_n^3) = a_{N+1}^3 - a_1^3$

Serien är konvergent om och endast om denna delsumma har ett gränsvärde. Eftersom a_n^3 är konvergent om och endast om a_n är konvergent, så är påståendet sant!
