

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1, TMV135

2009 04 17 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.

Telefon: David Heintz, 0762 72 18 60

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Bonuspoäng från hösten 2008 ingår.

Lösningar och besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :

www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0809/

Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv personliga koden på samtliga inlämnade papper.

1. (a) Beräkna $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$. (4p)

(b) Beräkna $\int_1^e \ln x^2 dx$ (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' - 2y = e^{2x}$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. (6p)

3. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y' = (y^2 + 1)x$ som uppfyller begynnelsevillkoret $y(1) = 0$. (6p)

4. Lös begynnelsevärdesproblemet $y'' + y = e^x$ $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ (6p)

5. Beräkna längden av kurvan $y = \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x}$ för $1 \leq x \leq 4$. (6p)

6. Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x \arctan x - x^2}$ (6p)

7. Undersök om serierna konvergerar eller ej. (5p)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln(1+n) - \ln n)$. (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \pi(n + 1/n)$.

8. Låt $f(x)$ vara en positiv funktion definierad på intervallet $[a, b]$, $a > 0$. Ange en integralformel för att beräkna volymen av den kropp som uppstår då området $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$ roterar kring

(a) x-axeln.

(b) y-axeln.

(c) Rita figurer och motivera dessa formler geometriskt. (7p)

Lycka till! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$