Matematisk analys i en variabel, E1, I1, Z1 (TMV136, MVE019, TMV135) 090417

1. a) $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{c} t=\sqrt{x},\ 0\to 0 \\ dx = 2tdt,\ 1\to 1\end{array}\right] = \int_0^1 e^t 2t\,dt = [\text{PI}] = 2([te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt) = 2(e - 0 - [e^t]_0^1) = \mathbf{2}$,

   b) $\displaystyle\int_1^e \ln x^2\,dx = 2\int_1^e \ln x\,dx = [\text{PI}] = 2([x\ln x]_1^e - \int_1^e x\frac{1}{x}\,dx) = 2(e - 0 - [x]_1^e) = \mathbf{2}.$

2. 1:a ord. linjär ODE. IF:
   $e^{\int -2\,dx} = e^{-2x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{d}{dx}(e^{-2x}y) = e^{-2x}e^{2x} = 1 \quad\Rightarrow\quad e^{-2x}y = x + C \Rightarrow\ y = (x+C)e^{2x}$
   och $1 = y(0) = C \quad\Rightarrow$

   Svar: $\mathbf{y = (x+1)e^{2x}}$.

3. Separabel $\dfrac{1}{y^2+1}\dfrac{dy}{dx} = x \Rightarrow \displaystyle\int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int x\,dx \Rightarrow\ \arctan y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \tan(\frac{x^2}{2} + C)$ och
   $0 = y(1) = tan(\dfrac{1}{2} + C) \Rightarrow C = -\dfrac{1}{2} \quad\Rightarrow$

   Svar: $\mathbf{y} = \tan(\dfrac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{2}} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}})$.

4. För y_h : kar. ekv. $r^2 + 1 = 0 \ \Rightarrow\ r = \pm i \Rightarrow y_h = C_1e^{-ix} + C_2e^{ix} = A\cos x + B\sin x$.
   För y_p, ansätt $y_p = Ce^x$. Insättning ger $e^x = Ce^x + Ce^x = 2Ce^x \Rightarrow\ C = 1/2 \Rightarrow y_p = \frac{1}{2}e^x$. Alltså har vi $y = y_p + y_h = \frac{1}{2}e^x + A\cos x + B\sin x$ och därmed $y' = \frac{1}{2}e^x - A\sin x + B\cos x$. Begynnelsedata ger $1/2 + A = 1$ och $1/2 + B = 0$ som ger $A = 1/2$ och $B = -1/2$.
   Svar: $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{e^x} + \cos\mathbf{x} - \sin\mathbf{x})$.

5. Sökt längd $L = \int_1^4 \sqrt{1 + (y')^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + (\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{x})^2}\,dx = \int_1^4 \sqrt{1 + (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2})}\,dx$
   $= \int_1^4 \sqrt{(\frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1}{x^2})}\,dx = \int_1^4 \sqrt{(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x})^2}\,dx = \int_1^4 |\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x}|\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 (x + \frac{1}{x})\,dx = \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2} + \ln x]_1^4$

   Svar: $\dfrac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}} + \ln\mathbf{2}$.

6. Gäller att $x\arctan x - x^2 = x(x - \frac{x^3}{3} + \mathcal{O}(x^5)) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$. Vidare har vi $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)$ så att $\sin^2 x - x^2 = (x - \frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5))^2 - x^2 = x^2 + 2x(-\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5)) + (-\frac{x^3}{3!} + \mathcal{O}(x^5))^2 - x^2 = -\frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)$.
   Alltså får vi $\dfrac{\sin^2 x - x^2}{x\arctan x - x^2} = \dfrac{-\frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)}{-\frac{x^4}{3} + \mathcal{O}(x^6)} = \dfrac{x^4(-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^6))}{x^4(-\frac{1}{3} + \mathcal{O}(x^6))} \to \dfrac{-1/3}{-1/3} = 1$ då $x \to 0$.
   Svar: **1**.

7. a) Vi har att $S_N \equiv \sum_{n=1}^N (\ln(1+n) - \ln n) = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln(1+N-1) - \ln(N-1) + \ln(1+N) - \ln N = \ln(1+N) - \ln 1 = \ln(1+N) \to \infty$ då $N \to \infty$ och följaktligen är serien **divergent**.

   b) Additionssats för sinus ger att serien är $\sum_{n\geq 1} \sin(n\pi)\cos(\pi/n) + \cos(n\pi)\sin(\pi/n) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n \sin(\pi/n) = \sum_{n\geq 1}(-1)^n a_n$ som är en alternerande serie där $a_n = \sin(\pi/n)$; med $0 \leq a_{n+1} \leq a_n$ för $n \geq 2$ och $a_n \to 0$ då $n \to \infty$. Alltså är serien **konvergent** enligt konvergenstestet för alternerande serier.

8. a) $\displaystyle\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$, b) $\displaystyle\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$, c) se bevis(skiss) i kursboken.