Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1, TMV135

2008 08 22 kl. 8.30–12.30.

Hjälpmedel: Inga, ej räknedosa. Formelsamling finns på baksidan.
Telefon: Adam Wojciechowski, 0762 72 18 60
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Bonuspoäng från hösten 2007 ingår.
Besked om rättningen lämnas på kursens hemsida :
www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0708/
Skriv program och inskrivningsår på omslaget, skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper.

---

1. Ange en primitiv funktion till
   (a) $x^2(12+x^3)^{19}$ (4p)
   (b) $(2x+1)\ln(x+1)$ (4p)
   (c) $\frac{1}{2x+x^2}$ (4p)

2. Bestäm den lösning till differentialekvationen $y'' + 2y' + 5y = 5$
   som uppfyller begynnelsevillkoret $y(0) = 1,\ y'(0) = 1.$ (6p)

3. Bestäm Maclaurinpolynomet av grad 3 för funktionen $f(x) = \ln(1 + xe^{-x})$. (6p)

4. Bestäm den lösning till differentialekvationen $xy' + (1 - x)y = 1,\ x > 0,$
   som har ett ändligt gränsvärde då $x \to 0$. (6p)

5. Kurvan $y = xe^{-x},\ 0 \leq x < \infty$ roterar kring x-axeln.
   Beräkna volymen av den obegränsade kropp som innesluts av den roterande kurvan. (6p)

6. Lösningen till differentialekvationen $xy'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ har en Maclaurinutveckling $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ Bestäm denna till och med x^4-termen.
   Ledning: Finn ett samband mellan koefficienterna a_n och a_{n+1}. (6p)

7. (a) Formulera och bevisa formeln för *partiell integration*. (3p)
   (b) Ge exempel på en *konvergent* och en *divergent* serie. (2p)
   (c) Demonstrera hur *Eulers metod* fungerar genom att med steglängd 1 beräkna $y(2)$ approximativt, då $y(x)$ är lösningen till begynnelsevärdesproblemet
   $y' = x + y^2,\ y(0) = 1.$
   Rita en figur som stöder din redogörelse! (3p)

Lycka till! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cos\xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{n}x^n + \binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}(1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$