Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2007-12-21

Skrivtid: 8.30-12.30 Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.
Telefon: Adam Wojciechowski, 0762-721860
För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.
Rättningen är klar senast 14/1. Besked om granskningstillfälle lämnas på kursens hemsida.
Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

a) $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-3)}\,dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$

(7p)

2 Lös begynnelsevärdesproblemet

$$y' + xy = x, \qquad y(0) = 7$$

(6p)

3 Bestäm volymen V av den kropp som bildas då det ändliga område som begränsas av x-axeln och grafen till funktionen $y = x(1-x)$ roterar

a) runt x-axeln, b) runt y-axeln

(7p)

4 Beräkna den generaliserade integralen

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(x^2-1)}\,dx$$

(kan du bara visa att den är konvergent så ger det delpoäng). (6p)

5 Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{x^2(1-\cos 3x)}$$

(6p)

6 Lös differentialekvationen

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

(6p)

7 När ett radiokativ isotop (nuklid) sönderfaller är sönderfallshastigheten proportionell mot den kvarvarande massan av nukliden. Vi har ett radioaktivt ämne I med massan $x(t)$ vid tiden t och med proportionalitetskonstanten a. Detta ämne sönderfaller till ett ämne II med proportionalitetskonstanten b, och vars massa är $y(t)$. Vi antar att nukliderna har samma atomvikt (t ex $\beta-$sönderfall) och att massförändringar p g a små energiändringar försummas. Bestäm funktionen $y(t)$ om $x(0) = A,\ y(0) = B$. Betrakta bara fallet $a \neq b$ (realistiskt!), och ange dessutom villkoret för att ämne II till en början ökar sin massa. (6p)

8 a) Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

är *konvergent* med *summan* s. Vad betyder det?

b) Bevisa att följden av termer $\{a_n\}$ i en konvergent serie har gränsvärdet 0 då $n \to \infty$.

c) Begynnelsevärdesproblemet

$$y' = \frac{y}{x+y}, \quad y(0) = 1$$

ska lösas approximativt med Eulers metod.
Ange det värde metoden ger för $y(1)$ om steglängden i $x-$led är $\frac{1}{2}$.

(6p)

God jul och gott nytt år! /LF

Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$
$$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$
$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$
$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$
$$2 \sin x \cos y = \sin(x+y) + \sin(x-y)$$
$$2 \sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$$
$$2 \cos x \cos y = \cos(x-y) + \cos(x+y)$$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\xi}$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$$