Matematik Chalmers
Matematisk analys i en variabel Z1, TMV135

Tentamenstid: 2007-04-14
Skrivtid: 8.30-12.30
Hjälpmedel: Formelsamling (på baksidan).
Telefonvakt: Micke Persson, Oskar Marmon (0762-721860/0762-721861)

Resultatet meddelas via Ladok senast ca 3 veckor efter tentamenstillfället. Granskning alla vardagar 9-13, MV:s expedition.

För godkänt krävs minst 20 poäng. Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4:30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Skriv linje samt inskrivningsår på skrivningsomslaget. Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade blad. Sortera uppgifterna i ordning och numrera sedan sidorna.

1. Beräkna
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx.$$
(6p)

2. Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = (\arctan x)/x^2$. (6p)

3. Beräkna längden av funktionsgrafen $f(x) = 2x\sqrt{x}, \ \ 0 \le x \le 1$. (6p)

4. Beräkna gränsvärdet
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arctan x - \arctan 2x}{3\sin x - \sin 3x}.$$
(6p)

5. Beräkna den generaliserade integralen
$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$$
(6p)

6. Lös begynnelsevärdesproblemet
$$y'' - 4y' + 4y = e^x, \qquad y(0) = 1, \ y'(0) = 0.$$
(6p)

7. Funktionen $y = y(x)$ är godtyckligt många gånger deriverbar kring $x = 0$ och uppfyller differentialekvationen
$$y' = x^2 + y^2, \qquad y(0) = 0.$$
Beräkna
$$\lim_{x\to 0} \frac{y(x)}{x^3}$$
(6p)

Var god vänd!

8. (a) Bevisa att

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x)dx = f(0)$$

då f är kontinuerlig kring $x = 0$. (2p)

(b) Vi vill lösa den ordinära differentialekvationen $t^2y' + y^2 = 1$ med begynnelsevillkoret $y(1) = 2$ i intervallet $[1, 5]$ numeriskt med hjälp av MATLAB. Komplettera nedanstående kod så att detta åstadkoms. (3p)

```
[t,y]=ode45(@(t,y)....., ...., .....)
```

(c) Samma fråga, men nu med differentialekvationen $t^2y'' + y^2 = 1$, begynnelsevillkor $y(1) = 2,\ y'(1) = 0$. (3p)

/LF

Trigonometriska formler

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$

$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$
$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$
$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$

En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1 + \xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är ξ ett tal mellan 0 och x.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \ldots (\alpha - k + 1)}{k!}$$