

# MATEMATIK

Chalmers tekniska högskola

## Matematisk analys i en variabel Z1 (TMV135) 2005-12-17

Skrivtid: 8.30-12.30

Hjälpmedel: Inga, ej heller räknedosa. Formelsamling på baksidan.

Telefon: Jonas Hartwig, 076-272 18 60

För godkänt krävs minst 20 poäng. I dessa ingår poäng från höstens Matlab-laborationer (max 6 poäng).

Betyg 3: 20-29 poäng, betyg 4: 30-39 poäng, betyg 5: 40-50 poäng.

Besked om rättning och granskning av tentan ges på kursens hemsida:

[www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0506/](http://www.math.chalmers.se/Math/Grundutb/CTH/tmv135/0506/)

Skriv namn och personnummer på samtliga inlämnade papper. Skriv linje och inskrivningsår på omslaget.

---

1 Beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + e^x \ln(1-x)}{x^2}$$

6 p

2 Beräkna

$$(a) \int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}} dx \quad (b) \int \frac{4-x^2}{x^3+2x^2+x} dx \quad (c) \int_{-1}^1 x^4(1+\tan x) dx$$

Obs: till integranden i (c) har vi inte lyckats hitta någon primitiv funktion!

12 p

3 Denna uppgift är redan gjord om du deltagit i höstens kurs och genomfört godkända laborationer. För **tentander som ej gått höstens kurs** gäller istället följande uppgift:

(a) Beräkna  $\int_1^5 (x-1)^3 dx$  approximativt med *trapetsmetoden*, 4 delintervall.

(b) Skriv Matlab-kod för en funktionsfil *trapets.m* som beräknar ett närmevärde för  $\int_a^b f(x) dx$  med trapetsmetoden,  $n$  delintervall. Funktionen  $f$  antas vara fördefinierad som en funktionsfil eller via kommandot *inline*. 6 p

4 Lös differentialekvationerna

(a)  $xy' = x^2 - 3y, \quad y(1) = 1$

(b)  $xy' = 2y(y+1), \quad y(1) = 1$

8 p

5 Området som begränsas av kurvan  $y = \sin x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , och  $x$ -axeln roterar kring

(a)  $x$ -axeln,

(b)  $y$ -axeln.

Beräkna de volymer som genereras.

6 p

6 Ett föremål i rätlinjig rörelse bromsas med en retardation som är proportionell mot kvadratroten ur hastigheten. Beräkna bromssträckan. Inför själv lämpliga beteckningar! 6 p

7 (a) Skissera ett bevis för *Analysens huvudsats*.

(b) Ange en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter vars allmänna lösning kan skrivas  $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$ .

6 p

God jul och gott nytt år!

/LF

## Trigonometriska formler

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$2 \sin x \cos y = \sin(x + y) + \sin(x - y)$$

$$2 \sin x \sin y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$$

$$2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$$

## En primitiv funktion

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}| + C$$

## Maclaurinutvecklingar

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\xi$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos \xi$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \cos \xi$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi^2)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + \binom{\alpha}{n+1} x^{n+1} (1+\xi)^{\alpha-n-1}$$

I alla utvecklingarna är  $\xi$  ett tal mellan 0 och  $x$ .

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$