Matematik, Chalmers

Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1, 05-12-17
Lösningar

1. Beräkna
$$\lim_{x\to 0}\frac{x+e^x\ln(1-x)}{x^2}.$$
Kända Maclaurinutvecklingar ger
$$\frac{x+e^x\ln(1-x)}{x^2}=\frac{x+(1+x+O(x^2))(-x-\frac{x^2}{2}+O(x^3))}{x^2}=\frac{-\frac{3x^2}{2}+O(x^3)}{O(x^2)}=-\frac{3}{2}+O(x).$$
Svar: $-3/2$.

2. Beräkna
$$(a)\quad\int_4^\infty e^{-\sqrt{x}}dx\qquad(b)\quad\int\frac{4-x^2}{x^3+2x^2+x}dx\qquad(c)\quad\int_{-1}^1 x^4(1+\tan x)dx$$
(a) Substitutionen $x=t^2$ och partialintegration ger
$$\int_4^\infty e^{-\sqrt{x}}\,dx=\int_2^\infty e^{-t}2t\,dt=\left[-2te^{-t}\right]_2^\infty+\int_2^\infty 2e^{-t}\,dt=\left[-2te^{-t}-2e^{-t}\right]_2^\infty.$$
Detta skall tolkas som gränsvärdet
$$\lim_{R\to\infty}\left(-2Re^{-R}-2e^{-R}+4e^{-2}+2e^{-2}\right)=6e^{-2}.$$
Svar: $6e^{-2}$.

(b) Nämnaren faktoriseras som $x^3+2x^2+x=x(x+1)^2$. Ansatsen
$$\frac{4-x^2}{x(x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$$
ger $A=4$, $B=-5$, $C=-3$, varefter man kan skriva upp den primitiva funktionen.

Svar: $4\ln|x|-5\ln|x+1|+\frac{3}{x+1}+D$.

(c) Eftersom $x^4\tan x$ är udda så är
$$\int_{-1}^1 x^4(1+\tan x)\,dx=\int_{-1}^1 x^4\,dx=\left[\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^1=\frac{2}{5}.$$
Svar: $2/5$.

3. (a) Beräkna $\int_1^5(x-1)^3dx$ approximativt med *trapetsmetoden*, 4 delintervall.

Med $f(x)=(x-1)^3$ och $h=(5-1)/4=1$ ger trapetsformeln följande närmevärde för integralen:
$T=h(f(1)/2+f(2)+f(3)+f(4)+f(5)/2)=0+1+8+27+32=68.$

Svar: 68.

(b) Skriv Matlab-kod för en funktionsfil *trapets.m* som beräknar ett närmevärde för $\int_a^b f(x)dx$ med trapetsmetoden, n delintervall. Funktionen f antas vara fördefinierad som en funktionsfil eller via kommandot *inline*.

Till exempel kan man skriva sa här:
```
>> function T=trapets(f,a,b,n)
>> h=(b-a)/n;
>> x=a+h:h:b-h;
>> T=h*(f(a)/2+sum(f(x))+f(b)/2);
```

4. Lös differentialekvationerna

$$xy' = x^2 - 3y, \qquad y(1) = 1,$$
$$xy' = 2y(y+1), \qquad y(1) = 1.$$

(a) Ekvationen är lineär och kan skrivas

$$y' + \frac{3}{x}\,y = x.$$

Integrerande faktor är x^3, ger

$$(x^3y)' = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad x^3y = \frac{x^5}{5} + C \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{5} + \frac{C}{x^3}.$$

Begynnelsevillkoret ger slutligen $C = 4/5$.
Svar: $y(x) = \frac{x^2}{5} + \frac{4}{5x^3}$.
(b) Ekvationen är separabel och kan skrivas

$$\int \frac{1}{y(y+1)}\,dy = \int \frac{2}{x}\,dx.$$

Efter partialbråksuppdelning i vänsterledet ger detta

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln(x^2) + C \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y}{y+1} = Ax^2$$

(där $A = \pm e^C$). Begynnelsevillkoret ger $A = 1/2$. Löser vi ut y får vi slutligen

$$\frac{y}{y+1} = \frac{x^2}{2} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{x^2}{2 - x^2}.$$

Svar: $y(x) = x^2/(2 - x^2)$.

5. Området som begränsas av kurvan $y = \sin x,\ 0 \leq x \leq \pi$, och x-axeln roterar kring (a) x-axeln, (b) y-axeln. Beräkna de volymer som genereras.

(a) Integration över skivor vinkelräta mot x-axeln ger

$$\pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \pi\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

(b) Integration över rör parallella med y-axeln ger

$$2\pi \int_0^\pi x \sin x\,dx = 2\pi\Big(\Big[x(-\cos x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x)dx\Big) = 2\pi\Big[-x\cos x + \sin x\Big]_0^\pi = 2\pi^2.$$

Svar: $\pi^2/2$ respektive $2\pi^2$.

6. Ett föremål i rätlinjig rörelse bromsas med en retardation som är proportionell mot kvadratroten ur hastigheten. Beräkna bromssträckan. Inför själv lämpliga beteckningar!

Låt $v(t)$ beteckna hastigheten vid tiden t. Då är $v' = -k\sqrt{v}$. Detta är en separabel ekvation med lösningen

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = -k \int dt \quad \Leftrightarrow \quad 2\sqrt{v} = -kt + C.$$

För att finna en fysikalisk tolkning av C stoppar vi in $t = 0$ och $v = v_0$, ger $C = 2\sqrt{v_0}$. Vi löser sedan ut v, ger

$$v(t) = \left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^2.$$

Integrerar vi detta får vi läget $s(t)$ vid tiden t, dvs

$$s(t) = -\frac{2}{3k}\left(\sqrt{v_0} - \frac{kt}{2}\right)^3 + D.$$

Från uttrycket för v ser vi att $v(t) = 0$ då parentesen är 0, så D är partikelns slutliga läge. Å andra sidan är $s(0) = -\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2} + D$. Totala bromssträckan är alltså $\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2}$.

Svar: $\frac{2}{3k}(v_0)^{3/2}$, där v_0 är begynnelsehastigheten och k den i uppgiften antydda proportionalitetskonstanten.

7. (a) Skissera ett bevis för *Analysens huvudsats*.
(b) Ange en linjär differentialekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter vars allmänna lösning kan skrivas $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$.

För (a), se någon lärobok i matematisk analys.
För (b) använder vi att differentialekvationen $y'' + ay' + by = 0$ har allmänna lösningen $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ om den karakteristiska ekvationen $r^2 + ar + b = 0$ har två *olika* rötter r_1 och r_2. Med $r_1 = 1,\ r_2 = -2,$ rekonstruerar vi den karakteristiska ekvationen $(r-1)(r+2) = r^2 + r - 2 = 0$, och därmed differentialekvationen $y'' + y' - 2y = 0$.