Tentamen i Matematisk analys i en variabel för Z1 (TMV135), 05-08-19
Lösningar

1. Beräkna $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$.

$$\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \left(t = e^x\right) = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[\arctan t\right]_1^R = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Svar: $\pi/4$.

2. Lös differentialekvationen $y'' - 2y' + 2y = e^x,\ y(0) = y(\pi/2) = 0$.

Karakteristiska polynomet $r^2 - 2r + 2$ har rötterna $r = 1 \pm i$, ger homogena lösningen $e^x(A\cos x + B\sin x)$. En partikulärlösning kan hittas med ansatsen $y = Ce^x$, ger $C = 1$ och alltså allmänna lösningen $e^x(A\cos x + B\sin x + 1)$. Villkoren $y(0) = y(\pi/2) = 0$ ger slutligen $A = B = -1$.
Svar: $y(x) = e^x(1 - \cos x - \sin x)$.

3. Beräkna den obestämda integralen $\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}\,dx$.

Ansatsen
$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$
ger $A = B = 1/2$, $C = -1/2$, $D = 0$. Vi kan sedan direkt skriva upp den primitiva funktionen.
Svar: $\frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - 1/(2(x+1))$.

4. Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x\sin(2x) - 2x}{x^3}$.

Vi använder standardutvecklingarna
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4),$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5),$$
ger
$$\cos x\sin(2x) = \left(1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)\right)\left(2x - \frac{(2x)^3}{6} + O(x^5)\right) = 2x - \frac{7x^3}{3} + O(x^5)$$
och därmed
$$\frac{\cos x\sin(2x) - 2x}{x^3} = -\frac{7}{3} + O(x^2) \to -\frac{7}{3} \qquad (x \to 0).$$
Svar: $-7/3$.

5. (a) Beskriv hur man i MATLAB löser ett linjärt ekvationssystem, och ge sedan den kod som behövs för att lösa nedanstående ekvationssystem.
$$\begin{cases} 9x_1 + & 4x_2 + & x_3 + & 7x_4 = & 11 \\ x_1 + & 12x_2 + & 21x_3 + & 3x_4 = & 19 \\ -4x_1 + & 13x_2 + & 20x_3 + & 8x_4 = & 1 \\ 2x_1 + & 5x_2 + & 3x_3 + & -x_4 = & 14 \end{cases}$$

(b) Beskriv hur man i MATLAB med hjälp av ode45 kan lösa differentialekvationen
$$y' = xy^2 + \sqrt{x},\ \ y(0) = 1$$
på intervallet $0 \le x \le 1$. Skriv ner de funktionsfiler du behöver och ge också kommandot för att plotta lösningen.

(a) $A = [9\ \ 4\ \ 1\ \ 7; 1\ \ 12\ \ 21\ \ 3; -4\ \ 13\ \ 20\ \ 8; 2\ \ 5\ \ 3\ \ -1];$
$B = [11; 18; 1; 14];$
$rref([A\ \ B])$
På detta sätt kan man se om det finns lösningar och i så fall hur många. Vid entydig lösning står denna i kolumnen längst till höger, om oändligt många, kan man i stort sett avläsa en parameterlösning ur matrisen, om lösning saknas, finns pivotelement i kolumnen längst till höger.
Om man i stället skriver
$A\backslash B$
så får man lösningen om den är entydig, vilket med största sannolikhet är fallet i vårt exempel (A kvadratisk).

(b) Tillverka först en ode-fil:

```
function f=uppg5b(x,y)
f=x.*y.^2+sqrt(x);
```

Kör ode-lösaren med t-intervallet [0,1] och begynnelsevärdet 1:

```
[x,y]=ode45(@uppg5b,[0,1],1)
```

Rita lösningskurvan:

```
plot(x,y)
```

6. På en ö har minkar lyckats etablera sig. Biologer bedömer att populationens utveckling kan beskrivas med differentialekvationen $y'(t) = A\,y(t)(1000 - y(t))$, där $y(t)$ är antalet minkar efter t år och A är en obekant konstant. År 200 4 beräknas antalet minkar till 100 stycken och år 2005 till 250 stycken. Hur många minkar förväntar man sig att finna år 2006?

Ekvationen är separabel:

$$y'(t) = A\,y(t)(1000 - y(t)) \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{dy}{y(1000-y)} = A\int dt.$$

Integralen i vänster led beräknas genom partialbråksuppdelning, ger

$$\frac{1}{1000}\ln\left|\frac{y}{1000-y}\right| = At + C.$$

Vi väljer $t = 0$ till år 2004. Insättning av $t = 0$ och $y = 100$ ger $1000C = \ln(1/9) = -2\ln(3)$. Insättning av $t = 1$, $y = 250$ ger sedan $1000A = \ln 3$, så ekvationen kan skrivas

$$\ln\left|\frac{y}{1000-y}\right| = (t-2)\ln 3.$$

Insättning av $t = 2$ ger $y = 1000 - y$, dvs $y = 500$.
Svar: $y = 500$.

7. Ett konstverk har formen av ett solitt halvklot med radie 1 meter, som ligger med den flata ytan mot marken. Det är tillverkat av ett plastmaterial sådant att densiteten på höjden h meter över marken är $1 + h$ kg/m^3. Beräkna klotets totala massa.

Vi tänker oss att vi delar in konstverket i tunna skivor parallella med marken. Varje skiva approximeras sedan med en cylinder med konstant densitet.
En skiva på höjden x meter över marken och med tjockleken dx kan approximeras med en cylinder med radie $r = \sqrt{1-x^2}$ och höjden $h = dx$. Denna har volymen $\pi r^2 h = \pi(1-x^2)\,dx$ och alltså massan $\pi(1+x)(1-x^2)\,dx$. “På vanligt sätt” (dvs strängt taget genom satsen om Riemannsummor) fås totala massan genom att integrera detta uttryck över alla förekommande x-värden, ger

$$\int_0^1 \pi(1+x)(1-x^2)\,dx = \frac{11\pi}{12}.$$

Svar: Massan är $11\pi/12$ kg.

8. (a) Formulera entydighetssatsen för Maclaurinutvecklingar. (b) Beräkna $f^{(101)}(0)$, där $f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

För (a), se läroboken Sats 8.4.
För (b) observerar vi först att integralkalkylens huvudsats ger $f'(x) = e^{x^2}$. Standardutvecklingen för e^x ger då

$$f'(x) = 1 + \cdots + \frac{x^{100}}{50!} + O(x^{102}).$$

Enligt del (a) är koefficienten framför x^{100} (i vårt fall $1/50!$) i en sådan utveckling nödvändigtvis lika med vänsterledets 100:e derivata i 0 (i vårt fall $f^{(101)}(0)$) delat med $100!$.
Svar: $f^{(101)}(0) = 100!/50! = 30685187562549660372027304595294697392284597216846889594477869869821589587723550720000000000000.$