

Tentamen
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet
Matematisk analys TMV170/MMGD30

2022-06-08, 14.00–18.00

Examinator: Simon Larson

Telefonvakt: Tony Johansson, ankn. 1069

Hjälpmedel: Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Numrera dina blad efter att du sorterat dem. Motivera dina svar väl och förenkla dina svar så långt som möjligt. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt och renskriv dina lösningar. Använd inte röd penna.

1. (a) Bestäm första- och andraderivatan av funktionen

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 8}.$$

- (b) Bestäm linjäriseringen av f kring $x = 3$ och använd denna för att finna ett närmevärde till $f(3.05)$.
- (c) Använd Taylors sats för att visa att felet i din uppskattning är mindre än $\frac{1}{50}$, det vill säga att om A är det närmevärde du beräknade i b) så är

$$|f(3.05) - A| < \frac{1}{50}. \quad (6p)$$

2. Bestäm integralerna

$$\int_0^1 \ln(1/x) dx \quad \text{och} \quad \int \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} dt. \quad (6p)$$

3. Visa att funktionen f definierad av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(1+\pi x)} & \text{för } x \neq 0 \\ 1 & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är deriverbar i 0 och bestäm $f'(0)$. (6p)

4. Hitta alla komplexa tal z som löser ekvationen

$$z^8 = 16.$$

Hur många olika lösningar finns det? (4p)

VÄND!

5. (a) Hitta lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 0 \quad \text{sådan att } y(1) = 0 \text{ och } y'(1) = \pi/e^2.$$

- (b) Hitta lösningen till differentialekvationen

$$y(x)y'(x) = \cos(x)/2 \quad \text{sådan att } y(0) = 2. \quad (8p)$$

6. Låt $h: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definieras av

$$h(t) = \frac{t}{2} + \cos(t).$$

Antar funktionen h något största och minsta värde? Om detta är fallet bestäm dessa värden och för vilka t de antas.

Tips: Du får använda att $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. (6p)

7. Kurvorna $y = \cosh(x)$ och $y = 5/4$ avgränsar tillsammans ett begränsat område i planet

- (a) beräkna områdets area,
(b) beräkna områdets omkrets.

Tips: Enligt dess definition är $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ vilket innebär att

$$\cosh(\ln(2)) = \cosh(-\ln(2)) = \frac{5}{4}. \quad (8p)$$

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{n} \left(1 + \tan\left(\frac{\pi j}{4n}\right)^2 \right). \quad (6p)$$

Lycka till!
Simon