LÖSNINGSFÖRSLAG TENTA 2022-06-08

1. (a) f har den naturliga definitionsmängden $(-\infty, -\sqrt{8}) \cup (\sqrt{8}, \infty)$ och kan på denna mängden skrivas som sammansättningen $g \circ h$ med $h(x) = x^2 - 8$ och $g(x) = \sqrt{x}$. Då h, g är elementära funktioner som vi vet är deriverbara godtyckligt många gånger på sina respektive definitionsmängder så säger kedjeregeln att också f är deriverbar på hela sin definitionsmängd och

$$f'(x) = (g \circ h)'(x) = g'(h(x))h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2-8}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}.$$

Med $r(x) = x$ har vi alltså att $f'(x) = \frac{r(x)}{f(x)}$. Kvotregeln och uttrycken för f, f' ger oss

$$f''(x) = \left(\frac{r}{f}\right)'(x) = \frac{r'(x)f(x) - f'(x)r(x)}{f(x)^2} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2-8} - \frac{x}{\sqrt{x^2-8}}x}{x^2-8} = -\frac{8}{(x^2-8)^{3/2}}.$$

Svar: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-8}}$ och $f''(x) = -\dfrac{8}{(x^2-8)^{3/2}}$

(b) Linjäriseringen av f kring 3 ges av $L(x) = f(3) + f'(3)(x-3)$ (den linjära funktion vars graf är tangenten till funktionsgrafen till f i punkten $x = 3$). Enligt a) och uttrycket för f finner vi att $f(3) = \sqrt{3^2-8} = 1$ och $f'(3) = \frac{x}{\sqrt{3^2-8}} = 3$ så den sökta linjäriseringen ges av

$$L(x) = 1 + 3(x-3) = 3x - 8\,.$$

Närmevärdet för $f(3.05)$ som ges av linjäriseringen är således $L(3.05) = 1 + 3(3.05 - 3) = 1 + 3 \cdot 0.05 = 1.15$.

Svar: Linjäriseringen ges av $L(x) = 3x - 8$ vilket ger närmevärdet 1.15 för $f(3.05)$.

(c) Enligt Taylors sats så finns det för varje $x \in [3, 3.05]$ (minst) ett $\alpha \in [3, 3.05]$ sådant att

$$f(x) = \underbrace{f(3) + f'(3)(x-3)}_{=L(x)=3x-8 \text{ enligt b)}} + \frac{f''(\alpha)}{2}(x-3)^2\,.$$

Efter att vi flyttat runt termerna och tar absolutbelopp finner vi att

$$|f(x) - L(x)| = \frac{1}{2}|f''(\alpha)(x-3)^2|.$$

Med $x = 3.05$ och från vårt uttryck för f'' från a) finner vi att för något $\alpha \in [3, 3.05]$ så att

$$|f(3.05) - 1.15| = \frac{1}{2}|f''(\alpha)(3.05-3)^2| = \frac{1}{2}\frac{8}{(\alpha^2-8)^{3/2}}(0.05)^2 = \frac{1}{100}\frac{1}{(\alpha^2-8)^{3/2}}.$$

Då vi inte vet vilket tal $\alpha \in [3, 3.05]$ som gör att detta gäller så vill behöver vi finna en övre begränsning som gäller för alla α. Genom att notera att funktionen $\alpha \mapsto \frac{1}{100}\frac{1}{(\alpha^2-8)^{3/2}}$ är avtagande för $\alpha \in [3, 3.05]$ så uttrycket är begränsat ovan av dess värde i $\alpha = 3$, d.v.s. för alla $\alpha \in [3, 3.05]$ gäller det att

$$\frac{1}{100}\frac{1}{(\alpha^2-8)^{3/2}} \le \frac{1}{100}\frac{1}{(3^2-8)^{3/2}} = \frac{1}{100}\,.$$

Således har vi funnit att

$$|f(3.05) - 1.15| \le \frac{1}{100} < \frac{1}{50}$$

vilket var det som vi skulle visa.

2. Den första integralen är en generaliserad integral då $\ln(1/x)$ är obegränsad på intervallet $(0, 1]$ (integranden är odefinierad i $x = 0$ och $\lim_{x\to 0^+} \ln(1/x) = \infty$). För att visa att integralen är konvergent och beräkna dess värde beräknar vi gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(1/x)\,dx\,.$$

Notera att för varje $\varepsilon > 0$ så är funktionen $x \mapsto \ln(1/x)$ kontinuerlig och begränsad på $[\varepsilon, 1]$ så integralen i gränsvärdet är väldefinierad.

Med hjälp av logaritmlagarna och att vi vet en primitiv funktion till $\ln(x)$ har vi att

$$\int_\varepsilon^1 \ln(1/x)\,dx = -\int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx = -[x\ln(x) - x]_\varepsilon^1 = 1 - \varepsilon + \varepsilon\ln(\varepsilon).$$

Så det sökta gränsvärdet är

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \ln(1/x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} (1 - \varepsilon + \varepsilon\ln(\varepsilon)) = 1,$$

där vi använde oss av standardgränsvärdet $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon\ln(\varepsilon) = 0$.

För att bestämma den indefinita integralen $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt$ så använder vi variabelsubstitution. Genom sätta $\sqrt{t} = u(t)$ och känna igen $\frac{1}{\sqrt{t}}$ som $2u'(t)$ finner vi från variabelsubstitution att

$$\int \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = 2\int \sin(u(t))u'(t)\,dt = 2\int \sin(u)\,du = -2\cos(u) + C = -2\cos(\sqrt{t}) + C\,.$$

Svar: $\displaystyle\int_0^1 \ln(1/x)\,dx = 1$ och $\displaystyle\int \frac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}\,dt = -2\cos(\sqrt{t}) + C.$

3. Enligt derivatans definition så är en funktion f deriverbar i punkten a om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existerar och om så är fallet är gränsvärdet $f'(a)$ derivatan av f i punkten a.

Med f som i uppgiften och $a = 0$ finner vi att

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin(\pi h)}{\ln(1+\pi h)} - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi h) - \ln(1+\pi h)}{h\ln(1+\pi h)}.$$

För att analysera gränsvärdet använder vi Taylorutveckling av täljare och nämnare: då $x \to 0$ har vi att

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{och} \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^3).$$

Således har vi att

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\pi h) - \ln(1+\pi h)}{h\ln(1+\pi h)} &= \lim_{h\to 0} \frac{\Big(\pi h + \mathcal{O}(h^3)\Big) - \Big(\pi h - \frac{\pi^2 h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)\Big)}{h\Big(\pi h - \frac{\pi^2 h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)\Big)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi^2 h^2}{2} + \mathcal{O}(h^3)}{\pi h^2 - \frac{\pi^2 h^3}{2} + \mathcal{O}(h^4)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\pi^2}{2} + \mathcal{O}(h)}{\pi + \mathcal{O}(h)} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Vi har visat att gränsvärdet existerar så f är deriverbar i 0 och $f'(0) = \frac{\pi}{2}$.

4. Vi skriver z på polär form som $z = |z|(\cos(\arg(z)) + i\sin(\arg(z))) = |z|e^{i\arg(z)}$ och söker $|z|$ och $\arg(z)$ så att ekvationen är uppfylld. Ekvationen tar då formen

$$z^8 = (|z|e^{i\arg(z)})^8 = |z|^8 e^{i8\arg(z)} = 16.$$

Då argumentet och absolutbeloppet av de två sidorna ska vara lika innebär det att

$$\begin{cases} |z|^8 = 16, \text{och} \\ 8\arg(z) = 2k\pi \quad \text{för något } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Således uppfyller alla lösningar att $|z| = \sqrt{2}$ att det finns $k \in \mathbb{Z}$ så att $\arg(z) = \frac{k\pi}{4}$. Låt z_k vara lösningen som motsvarar ett specifikt val av $k \in \mathbb{Z}$, d.v.s. $z_k = \sqrt{2}e^{i\frac{k\pi}{4}}$. Då $e^{i\frac{(k+8)\pi}{4}} = e^{i\frac{k\pi}{4}+i2\pi} = e^{i\frac{k\pi}{4}}$ ser vi att om $m = k + 8$ har vi att $z_k = z_m$. Det finns därför 8 stycken olika lösningar nämligen

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt{2} \\
z_1 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) = 1 + i \\
z_2 &= \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}} = \sqrt{2}(\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)) = i\sqrt{2} \\
z_3 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) = -1 + i \\
z_4 &= \sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -\sqrt{2} \\
z_5 &= \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = \sqrt{2}\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) = -1 - i \\
z_6 &= \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{2}(\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)) = -i\sqrt{2} \\
z_7 &= \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)) = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\Big) = 1 - i
\end{aligned}$$

Svar: Det finns totalt 8 olika lösningar, nämligen:

$$\sqrt{2}, \quad 1+i, \quad i\sqrt{2}, \quad -1+i, \quad -\sqrt{2}, \quad -1-i, \quad -i\sqrt{2}, \quad \text{och} \quad 1-i.$$

5. (a) Differentialekvationen är en homogen linjär ekvation av andra ordningen med konstanta koefficienter. Vi hittar den allmänna lösningen genom att hitta rötterna till det karakteristiska polynomet. I vårt fall är det karakteristiska polynomet $r^2 + 4r + 4 = (r + 2)^2$ som har en dubbelrot i $r = -2$. Enligt sats i kursen ges alla lösningar av differentialekvationen av

$$y(x) = (Ax + B)e^{-2x}$$

för konstanter $A, B \in \mathbb{R}$. Det återstår att hitta A, B så att $y(1) = 0$ och $y'(1) = \pi/e^2$.

Om $y(x) = (Ax+B)e^{-2x}$ så är $y(1) = (A+B)e^{-2}$, vilket ger att $y(1) = 0$ om och endast om $A+B = 0$. På liknande vis har vi att $y'(x) = (A-2Ax-2B)e^{-2x}$ så $y'(1) = (-A-2B)e^{-2}$. Därav är $y'(1) = \pi/e^2$ om och endast om $-A-2B = \pi$. Vi har de två linjära ekvationerna $A + B = 0$ och $-A - 2B = \pi$ vars lösning ges av $A = \pi$ och $B = -\pi$. Den sökta lösningen är alltså $y(x) = (\pi x - \pi)e^{-2x} = \pi(x-1)e^{-2x}$.

Svar: $y(x) = \pi(x-1)e^{-2x}$.

(b) Differentialekvationen är en separabel ekvation av första ordningen. Med hjälp av kedjeregeln så identifierar vi vänsterledet i ekvationen med $(\frac{y(x)^2}{2})'$, d.v.s. ekvationen kan skrivas som

$$\left(\frac{y(x)^2}{2}\right)' = \cos(x)/2.$$

Genom att integrera båda sidorna har vi därav att för någon konstant C är

$$\frac{y(x)^2}{2} = \frac{\sin(x)}{2} + C\,.$$

Från villkoret att $y(0) = 2$ finner vi att

$$2 = \frac{y(0)^2}{2} = \frac{\sin(0)}{2} + C = C,$$

vilket innebär att $C = 2$.

Vi har visat att för varje x så löser $y(x)$ ekvationen

$$y(x)^2 = \sin(x) + 4.$$

Och således är $y(x) = \sqrt{\sin(x)+4}$ eller $y(x) = -\sqrt{\sin(x)+4}$, men då den senare har fel tecken då $x = 0$ är det den första vi söker.

Svar: $y(x) = \sqrt{\sin(x)+4}$.

6. Funktionen h är en kontinuerlig funktion (då det är en summa av elementära funktioner) definierad på ett slutet begränsat intervall. Enligt sats i kursen så antar därför h både ett största och minsta värde.

Då h är deriverbar på $(0, 2\pi)$ så kan dessa värden enligt sats i kursen enbart antas i punkter $t \in (0, 2\pi)$ där $h'(t) = 0$ (stationära punkter) eller i ändpunkterna $t = 0$ och $t = 2\pi$.

I ändpunkterna finner vi att $h(0) = 1$ och $h(2\pi) = \pi + 1$.

Derivatan av h ges av $h'(t) = \frac{1}{2} - \sin(t)$. Stationära punkter för h uppfyller således ekvationen $\frac{1}{2} - \sin(t) = 0$ eller ekvivalent $\sin(t) = \frac{1}{2}$, vilket innebär att $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ eller $t = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ för $k \in \mathbb{Z}$. De enda lösningarna som ligger i intervallet $(0, 2\pi)$ är de med $k = 0$, d.v.s. $t = \frac{\pi}{6}$ och $t = \frac{5\pi}{6}$. Då h' är kontinuerlig och

$$\lim_{t\to 0} h'(t) = 1/2 > 0, \quad h'(\pi/2) = -1/2 < 0, \quad h'(\pi) = 1/2 > 0$$

har vi följande teckentabell

	$t = 0$	$0 < t < \frac{\pi}{6}$	$t = \frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6} < t < \frac{5\pi}{6}$	$t = \frac{5\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6} < t < 2\pi$	$t = 2\pi$
h'	ej def.	$+$	0	$-$	0	$+$	ej def.
h	1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\pi + 1$

Vi ser att h antar sitt minsta värde i antingen $t = 0$ eller $t = \frac{5\pi}{6}$ och sitt största värde i antingen $t = \frac{\pi}{6}$ eller $t = 2\pi$.

I de stationära punkterna finner vi

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{och} \quad h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Då $\sqrt{3} < 2$ och $\frac{1}{12} < 1$ har vi att

$$h\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} < \pi + 1 = h(2\pi)$$

så h antar som störst värdet $\pi + 1$ och detta sker i $t = 2\pi$.

För att jämföra $h(0)$ och $h(5\pi/6)$ använder vi tipset:

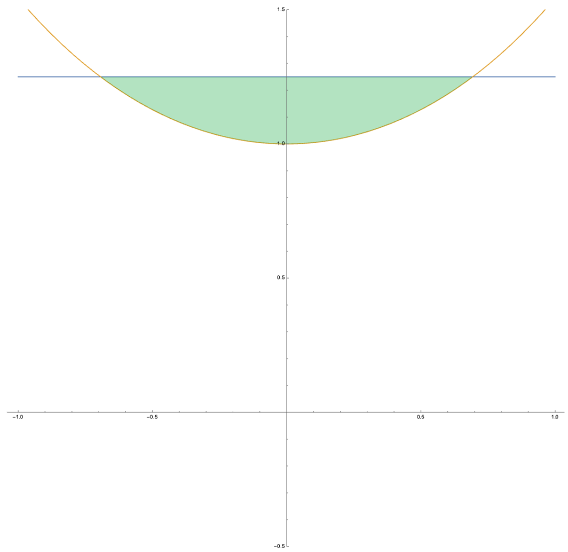
$$h\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2} < 1 = h(0).$$

Således är antar h sitt minsta värde, $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ då $t = \frac{5\pi}{6}$.

Svar: h antar både största och minsta värde. Det största värdet är $\pi + 1$ och antas då $t = 2\pi$. Det minsta värdet är $\frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ som antas då $t = \frac{5\pi}{6}$.

7. Funktionen $\cosh(x)$ är jämn, konvex, strängt avtagande på $(-\infty, 0]$ och strängt växande på $[0, \infty)$. Således skär de två kurvorna $y = \cosh(x)$ och $y = 5/4$ varandra enbart i punkterna $(\ln(2), 5/4)$ och $(-\ln(2), 5/4)$ (d.v.s. då $x = \ln(2)$ eller $x = -\ln(2)$).

Området ser ut som följer:



(a) Områdets area ges av integralen

$$
\begin{aligned}
\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} (5/4 - \cosh(x))\, dx &= \Big[5x/4 - \sinh(x)\Big]_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \sinh(\ln(2)) + \sinh(-\ln(2)) \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{e^{\ln(2)} - e^{-\ln(2)}}{2} + \frac{e^{-\ln(2)} - e^{\ln(2)}}{2} \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{2 - 1/2}{2} + \frac{1/2 - 2}{2} \\
&= \frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

Svar: Områdets area är $\frac{5}{2}\ln(2) - \frac{3}{2}$ areaenheter.

(b) För att beräkna områdets omkrets behöver vi beräkna längden av kurvan $y = \cosh(x)$ när x löper från $-\ln(2)$ till $\ln(2)$ (kurvan som begränsar området från nedan) och längden av kurvan $y = 5/4$ när x löper från $-\ln(2)$ till $\ln(2)$ (kurvan som begränsar området från ovan). Den totala omkretsen är summan av dessa två längder.

Längden av linjesegmentet som ges av $y = 5/4$ och $x \in [-\ln(2), \ln(2)]$ är så klart $2\ln(2)$.

För att beräkna längden av den andra kurvan använder vi formeln för längden av en kurva som ges av en funktionsgraf, nämligen om $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ är en deriverbar funktion så ges längden dess graf av integralen

$$\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx.$$

I vårt fall är $f(x)=\cosh(x)$ och $a=-\ln(2)$ och $b=\ln(2)$. Då $(\cosh(x))'=\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ så är den sökta längden

$$\begin{aligned}\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \sqrt{1+\sinh(x)^2}\,dx &= \int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \cosh(x)\,dx \\ &= \Big[\sinh(x)\Big]_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \\ &= \frac{e^{\ln(2)}-e^{-\ln(2)}}{2} - \frac{e^{-\ln(2)}-e^{\ln(2)}}{2} = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

där vi använde oss av den hyperboliska ettan, $\cosh(x)^2-\sinh(x)^2=1$

Svar: Områdets omkrets är $2\ln(2)+\frac{3}{2}$ längdenheter.

8. Om vi definierar $f(x)=1+\tan(\pi x/4)^2$ så kan vi identifiera summan

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(1+\tan\Big(\frac{\pi j}{4n}\Big)^2\Big) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} f\Big(\frac{\pi j}{4n}\Big)$$

som den Riemannsumma för integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ som fås av att dela upp intervallet $[0,1]$ i n de lika långa delintervallen $[(j-1)/n, j/n]$ för $j=1,\dots,n$ och utvärdera f i den högra ändpunkten på varje delintervall.

Funktionen f är en kontinuerlig funktion på $[0,1]$ detta följer då $\pi x/4 \in (-\pi/2,\pi/2)$ om $x\in[0,1]$ så vi undviker diskontinuiteterna av tan. Enligt sats i kursen vet att om en följd av Riemannsummor för integralen $\int_0^1 f(x)\,dx$ uppfyller att längden av samtliga delintervall konvergerar mot noll, så konvergerar följden av Riemannsummor mot integralens värde. I vårt fall är längden av samtliga delintervall $1/n$ vilket går mot noll när n går mot oändligheten så satsen säger oss att

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(1+\tan\Big(\frac{\pi j}{4n}\Big)^2\Big) = \int_0^1 \Big(1+\tan\Big(\frac{\pi x}{4}\Big)^2\Big)\,dx.$$

För att beräkna gränsvärdet återstår det att beräkna integralen. Då $\big(\tan\big(\frac{\pi x}{4}\big)\big)' = \frac{\pi}{4}\big(1 + \tan\big(\frac{\pi x}{4}\big)^2\big)$ så gäller det att

$$\int_0^1 \left(1 + \tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)^2\right) dx = \frac{4}{\pi}\left[\tan\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]_0^1 = \frac{4}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{\pi}.$$

Svar: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{1}{n}\left(1 + \tan\left(\dfrac{\pi j}{4n}\right)^2\right) = \dfrac{4}{\pi}.$