

Tentamen  
Chalmers tekniska högskola & Göteborgs universitet  
Matematisk analys TMV170/MMGD30

2022-03-17, 14.00–18.00

**Examinator:** Simon Larson, Matematiska vetenskaper, Chalmers

**Telefonvakt:** Simon Larson, telefon: 031-772 6457

**Hjälpmedel:** Inga

Totalt kan man få 50 poäng.

TMV170: För betyget 3 krävs minst 20 poäng. För betyg 4 eller 5 krävs 30 resp. 40 poäng.

MMGD30: För betyget G krävs minst 20 poäng. För betyget VG krävs 36 poäng.

Skriv personnummer och namn på omslaget. Ange kod på *varje* blad.

Behandla endast en uppgift per blad (deluppgifter på samma blad är dock ok). Sortera och numrera dina blad innan du lämnar in. Motivera dina svar väl och renkskriv dina lösningar. Det är i huvudsak beräkningar och motiveringar som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Använd inte röd penna.

- 
1. (a) Bestäm derivatan av

$$f(x) = \frac{e^{\pi x} - 1}{e^{\cos(x)}}. \quad (2p)$$

- (b) Bestäm derivatan av

$$g(x) = \int_0^{\pi \arctan(x)} e^{t^2} dt. \quad (3p)$$

- (c) Visa att

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{f(x)} = e.$$

**Tips:** Använd svaren du fick på (a) och (b). Även om du inte svarat på (a) och (b) så kan en förklaring hur svaren kan användas för att beräkna gränsvärdet ge poäng. (3p)

2. Beräkna

$$\int_0^{3\pi^2} \cos(\sqrt{x + \pi^2}) dx \quad \text{och} \quad \int \frac{x + 2}{x^2 + 4x - 5} dx. \quad (6p)$$

3. Bestäm konstant  $c \in \mathbb{R}$  så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} & \text{för } x \neq 0 \\ c & \text{för } x = 0 \end{cases}$$

är kontinuerlig i 0. (6p)

VÄND!

4. Bestäm de allmänna lösningarna till differentialekvationerna

(a)  $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 10 \sin(t)$ , och

(b)  $y''(t) + 4y(t) = 4t^2$

genom att hitta alla lösningar till de homogena ekvationerna och hitta en partikulärlösning. (6p)

5. Skriv det komplexa talet

$$\frac{(\sqrt{3} + i)^{10}}{(2i)^5}$$

på rektangulär form, d.v.s. som  $a + ib$  där  $a, b \in \mathbb{R}$ . (4p)

6. Betrakta funktionen  $f$  som ges av  $f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} + \arctan(x)$ .

(a) Bestäm de intervall där  $f$  är växande respektive avtagande.

(b) Avgör om  $f$  antar något största och minsta värde.

(c) Finn alla asymptoter till funktionsgrafens  $y = f(x)$ .

(d) Använd svaren i (a)-(c) för att bestämma värdemängden för  $f$ .

(e) Använd svaren i (a)-(d) för att skissa funktionsgrafens till  $f$ . (8p)

7. Betrakta funktionen  $g(x) = \sqrt{x}e^{-\pi x^2/2}$  för  $x \geq 0$ . Ställ upp en integral vars värde är volymen av den kropp som uppkommer om vi roterar funktionsgrafens till  $g$  runt  $x$ -axeln. Ange på vilket sätt denna integralen är generaliserad och beräkna volymen. (6p)

8. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\pi n}} \int_n^{n+1} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}} dx.$$

**Tips:** Integralen är svår att beräkna explicit, använd istället lämpliga uppskattningar. (6p)

Lycka till!  
Simon