LÖSNINGSFÖRSLAG TENTA 2022-03-17

1. (a) f är en elementär kombination av deriverbara funktioner (en kvot av sammansättningar). Då funktionen i nämnaren aldrig blir noll så är f deriverbar. Enligt kvotregeln och kedjeregeln finner vi efter elementära förenklingar att

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^{\pi x}-1)'e^{\cos(x)} - (e^{\pi x}-1)(e^{\cos(x)})'}{e^{2\cos(x)}} \\ &= \frac{\pi e^{\pi x}e^{\cos(x)} + \sin(x)(e^{\pi x}-1)e^{\cos(x)}}{e^{2\cos(x)}} \\ &= \frac{(\pi+\sin(x))e^{\pi x} - \sin(x)}{e^{\cos(x)}}. \end{aligned}$$

Svar: $f'(x) = \dfrac{(\pi+\sin(x))e^{\pi x} - \sin(x)}{e^{\cos(x)}}$.

(b) Enligt analysens huvudsats är $F(y) = \int_0^y e^{t^2}\,dt$ en primitiv funktion till $y \mapsto e^{y^2}$ på varje intervall där denna funktionen är integrerbar. Då $y \mapsto e^{y^2}$ är kontinuerlig på varje begränsat intervall är så gäller det att F är en primitiv på hela $\mathbb{R}$. Det vill säga, F väldefinierad på hela $\mathbb{R}$ och uppfyller där att $F'(y) = e^{y^2}$.

Från att $g(x) = F(\pi\arctan(x))$, kedjeregeln och det faktum att $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ finner vi

$$g'(x) = F'(\pi\arctan(x))\frac{\pi}{1+x^2} = \frac{\pi e^{\pi^2\arctan(x)^2}}{1+x^2}.$$

Svar: $g'(x) = \dfrac{\pi e^{\pi^2\arctan(x)^2}}{1+x^2}$.

(c) Från (a) och (b) ser vi från de framtagna formlerna för g', f' att g, f är två gånger deriverbara i en omgivning av $x=0$ med begränsade andraderivator. Vidare ger oss uttrycken för f, g och svaren på (a) och (b) att $f(0)=0$, $f'(0)=\pi/e$ och $g(0)=0, g'(0)=\pi$, så enligt Taylors sats är

$$f(x) = \frac{\pi}{e}x + \mathcal{O}(x^2) \quad \text{och} \quad g(x) = \pi x + \mathcal{O}(x^2).$$

Med hjälp av detta kan vi beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to0}\frac{\pi x + \mathcal{O}(x^2)}{\frac{\pi}{e}x + \mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x\to0}\frac{\pi + \mathcal{O}(x)}{\frac{\pi}{e} + \mathcal{O}(x)} = e.$$

Här förkortade vi i det andra steget med x och använde i det sista instängningssatsen. Således har vi visat det som efterfrågades.

För en alternativ lösning kan man istället tillämpa l'Hôpitals regel.

2. Den första integralen kan beräknas med hjälp av att först göra substitutionen $u = \sqrt{x+\pi^2}$ och sedan tillämpa partiell integration:

$$\begin{aligned}
\int_0^{3\pi^2} \cos(\sqrt{x+\pi^2})\,dx &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \sqrt{x+\pi^2}, & x = u^2-\pi^2 \\ dx = 2u\,du & \\ x = 0 \Leftrightarrow u = \pi, & x = 3\pi^2 \Leftrightarrow u = 2\pi \end{array} \right\} \\
&= \int_\pi^{2\pi} \cos(u) 2u\,du \\
&= \big[2u\sin(u)\big]_\pi^{2\pi} - \int_\pi^{2\pi} 2\sin(u)\,du \\
&= \big[2u\sin(u)\big]_\pi^{2\pi} - \big[-2\cos(u)\big]_\pi^{2\pi} \\
&= 4\pi\sin(2\pi) - 2\pi\sin(\pi) + 2\cos(2\pi) - 2\cos(\pi) \\
&= 4.
\end{aligned}$$

Den andra integralen kan finnas via partialbråksuppdelning.

Vi faktoriserar nämnaren som $x^2+4x-5 = (x-1)(x+5)$. Då vet vi att det finns $A, B \in \mathbb{R}$ sådana att

$$\frac{x+2}{x^2+4x-5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+5}.$$

Vi förlänger med x^2+4x+5 och finner att

$$x+2 = (x+5)A + (x-1)B$$

för alla x. Speciellt får vi genom att sätta in $x = 1$ att $3 = 6A$ och genom att sätta in $x = -5$ att $-3 = -6B$, vilket innebär att $A = B = 1/2$.

Således är

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+2}{x^2+4x-5}\,dx &= \int \Big(\frac{1}{2}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{x+5}\Big)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+5}\,dx \\
&= \frac{\ln|x-1|}{2} + \frac{\ln|x+5|}{2} + C \\
&= \frac{\ln(|x-1||x+5|)}{2} + C = \frac{\ln|x^2+4x-5|}{2} + C.
\end{aligned}$$

Svar: $\displaystyle\int_0^{3\pi^2} \cos(\sqrt{x+\pi^2})\,dx = 4$ och $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+4x-5}\,dx = \frac{\ln|x^2+4x-5|}{2} + C.$

3. Enligt definitionen av kontinuitet så är en funktion f kontinuerlig i punkten a ifall $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Således vill vi visa att vi kan välja c i uppgiften så att detta gäller med $a = 0$.

Genom Taylor's sats vet vi att

$$\sin(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{och} \quad \log(1+x) = x + \mathcal{O}(x^2) \quad \text{när } x \to 0.$$

Vi finner att

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+\mathcal{O}(x^3)}{x+\mathcal{O}(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1+\mathcal{O}(x^2)}{1+\mathcal{O}(x)} = 1.$$

Därav är f kontinuerlig i $x = 0$ om och endast om vi väljer $c = 1$.

4. (a) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 2r - 3 = (r-1)(r+3) = 0$. Vi har två olika reella rötter nämligen $r_1 = 1$ och $r_2 = -3$, så alla lösningar till den homogena ekvationen ges av

$$y_h(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

För att hitta alla lösningen på den inhomogena ekvationen så söker vi en partikulärlösning.

Då högerledet ges av $10\sin(t)$ försöker vi hitta en lösning på formen $A\sin(t) + B\cos(t)$. Genom att derivera finner vi att

$$\begin{aligned}
&(A\sin(t) + B\cos(t))'' + 2(A\sin(t) + B\cos(t))' - 3(A\sin(t) + B\cos(t)) \\
&\qquad = (-A\sin(t) - B\cos(t)) + 2(A\cos(t) - B\sin(t)) - 3(A\sin(t) + B\cos(t)) \\
&\qquad = \sin(t)(-A - 2B - 3A) + \cos(t)(-B + 2A - 3B) \\
&\qquad = \sin(t)(-4A - 2B) + \cos(t)(2A - 4B).
\end{aligned}$$

Vi hittar därför en partikulärlösning om vi väljer A, B så att $-4A - 2B = 10$ och $2A - 4B = 0$. Genom att lösa detta linjära ekvationssystem, finner vi att $A = -2, B = -1$.

Vi har hittat partikulärlösning, $y_p(t) = -2\sin(t) - \cos(t)$.

Alla lösningar till ekvationen kan skrivas som summan av en partikulärlösning och en lösning till den homogena ekvationen vilket leder oss till följande svar.

Svar: Den allmänna lösningen till differential ekvationen är

$$y(t) = -2\sin(t) - \cos(t) + C_1 e^t + C_2 e^{-3t} \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Vi börjar med att lösa den homogena ekvationen $y''(t) + 4y(t) = 0$. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 + 4 = 0$ med rötterna $r_1 = 2i, r_2 = -2i$. Alla lösningar till den homogena ekvationen ges av

$$y_h(t) = C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t) \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

För att hitta alla lösningen på den inhomogena ekvationen så söker vi en partikulärlösning.

Då högerledet ges av $4t^2$ letar vi en lösning på formen $A + Bt + Ct^2$. Genom att derivera finner vi att

$$\begin{aligned}(A + Bt + Ct^2)'' + 4(A + Bt + Ct^2) &= (2C) + 4(A + Bt + Ct^2) \\ &= 4Ct^2 + 4Bt + 4A + 2C\end{aligned}$$

Vi hittar därför en partikulärlösning om vi väljer A, B, C så att $4C = 4$ och $4B = 0$ och $4A + 2C = 0$, vilket ger $A = -1/2, B = 0, C = 1$. Vi har således hittat en partikulärlösning $y_p(t) = t^2 - 1/2$.

Alla lösningar till ekvationen ges som summan av vår partikulärlösning och en lösning till den homogena ekvationen.

Svar: Den allmänna lösningen till differential ekvationen är

$$y(t) = t^2 - 1/2 + C_1 \sin(2t) + C_2 \cos(2t) \quad \text{för } C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

5. Vi börjar med att observera att nämnaren kan skrivas om som $(2i)^5 = 2^5 i^5 = 2^5 i$, där vi använde den definierande egenskapen att $i^2 = -1$.

För att förenkla täljaren skriver vi det komplexa talet $\sqrt{3}+i$ på polär form. Absolutbeloppet ges av $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3 + 1} = 2$. För att hitta argumentet söker vi en vinkel θ så att

$$\sqrt{3} + i = 2\Big(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\Big) = 2(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = 2e^{i\theta}.$$

Vi ser att $\theta = \pi/6$ uppfyller detta. Så $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$.

Vi kan således skriva om det komplexa talet i uppgiften som

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{3} + i)^{10}}{(2i)^5} &= \frac{(2e^{i\pi/6})^{10}}{(2i)^5} \\ &= \frac{2^{10} e^{i10\pi/6}}{2^5 i} \\ &= -i2^5 e^{i10\pi/6},\end{aligned}$$

där vi använde att $1/i = -i$. För att skriva detta tal på rektangulär form behöver vi skriva om $e^{i10\pi/6}$. Enligt definitionen av den komplexa exponentialfunktionen är

$$e^{i10\pi/6} = \cos\left(\tfrac{10\pi}{6}\right)+i\sin\left(\tfrac{10\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi-\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\tfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\tfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\tfrac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Därav finner vi slutligen att

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{10}}{(2i)^5} = -i2^5e^{i10\pi/6} = -i2^5\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2^4\sqrt{3}-2^4i = -16\sqrt{3}-16i.$$

Svar:

$$\frac{(\sqrt{3}+i)^{10}}{(2i)^5} = -16\sqrt{3}-16i.$$

6. (a) Då $x^2+1>0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ så är den rationella funktionen $x \mapsto \frac{x+2}{x^2+1}$ deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Då detsamma gäller $x \mapsto \arctan(x)$ så är f deriverbar på hela $\mathbb{R}$ som en summa av deriverbara funktioner.

För att hitta derivatan av f använder vi kvotregeln för att beräkna derivatan av den första termen och att $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$, detta ger

$$f'(x) = \frac{x^2+1-(x+2)2x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2+1-2x^2-4x+x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{2-4x}{(x^2+1)^2}.$$

Då nämnaren $x^2+1>0$ för alla $x \in \mathbb{R}$ är derivatans tecken detsamma som tecknet av $2-4x$. Vi finner att vi har följande teckentabell

	$x<1/2$	$x=1/2$	$x>1/2$
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	$2+\arctan(1/2)$	$\searrow$

Svar: f är växande på $(-\infty, 1/2]$ och avtagande på $[1/2, \infty)$.

(b) Enligt teckentabellen ovan så har f ett globalt maximum i $x = 1/2$ med värdet $f(1/2) = 2+\arctan(1/2)$. Då f är strängt växande på $(-\infty, 1/2)$ och strängt avtagande på $(1/2, \infty)$ så antar in f något minsta värde.

Svar: f antar ett största värde $2+\arctan(1/2)$ i $x = 1/2$ och antar inget minsta värde.

(c) Då f är kontinuerlig (till och med deriverbar) på hela $\mathbb{R}$ så finns inga vertikala asymptoter. Vi behöver således undersöka existensen av sneda asymptoter mot ∞ och $-\infty$.

Mot ∞: Om $y = kx + m$ är en sned asymptot till f mot ∞ måste k ges av gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x+2}{x(x^2+1)} + \frac{\arctan(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1+2/x}{x^2+1} + \frac{\arctan(x)}{x}\Big) = 0$$

där vi använde instängningssatsen och att arctan är begränsad. Således har vi möjligtvis en horisontell asymptot på formen $y = m$ mot ∞. Om så är fallet existerar följande gränsvärde och ger oss värdet på m,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{x+2}{x^2+1} + \arctan(x)\Big) = \lim_{x\to\infty}\Big(\frac{1+2/2}{x+1/x} + \arctan(x)\Big) = \frac{\pi}{2},$$

där vi igen använde instängningssatsen och det faktum att $\lim_{x\to\infty}\arctan(x) = \frac{\pi}{2}$. Vi har således funnit att $y = \frac{\pi}{2}$ är en asymptot till f mot ∞.

Mot $-\infty$: Om $y = kx + m$ är en sned asymptot till f mot $-\infty$ måste k ges av gränsvärdet

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x+2}{x(x^2+1)} + \frac{\arctan(x)}{x}\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1+2/x}{x^2+1} + \frac{\arctan(x)}{x}\Big) = 0$$

där vi som ovan använde att instängningssatsen och att arctan är begränsad. Således har vi möjligtvis även en horisontell asymptot $y = m$ mot $-\infty$. Vi söker ett möjligt värde för m,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{x+2}{x^2+1} + \arctan(x)\Big) = \lim_{x\to-\infty}\Big(\frac{1+2/2}{x+1/x} + \arctan(x)\Big) = -\frac{\pi}{2},$$

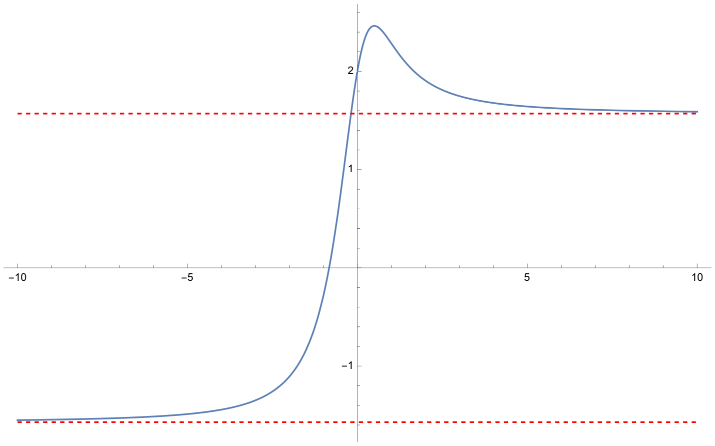
där vi igen använde instängningssatsen och att $\lim_{x\to-\infty}\arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$. Vi har således funnit att $y = -\frac{\pi}{2}$ är en asymptot till f mot $-\infty$.

Svar: f har asymptoterna $y = \pi/2$ när $x \to \infty$ och $y = -\pi/2$ då $x \to -\infty$.

(d) I deluppgift (a) har vi visat att f är växande på $(-\infty, 1/2]$ och avtagande på $[1/2, \infty)$. Enligt (b) antar f sitt största värde $2 + \arctan(1/2)$ i $x = 1/2$. Kombinerat med asymptoterna funna i (c) drar vi slutsatsen att värdemängden för f ges av $(-\pi/2, 2 + \arctan(1/2)]$.

Svar: f har värdemängden $\big(-\frac{\pi}{2}, 2 + \arctan\big(\frac{1}{2}\big)\big]$.

(e) Nedan finns en figur visandes grafen för f. Som visat i (a) är funktionen växande fram till $x = 1/2$ och avtagande efter detta. Enligt (b) har vi ett globalt maximum i $x = 1/2$ med värdet $2 + \arctan(1/2) \approx 2.5$ och inget globalt minimum. Vi har markerat in de två asymptoterna funna i (c) och ser att grafen närmar sig dessa.



7. Enligt formel i kursen ges volymen av integralen

$$V = \int_0^\infty \pi (g(x))^2\,dx = \int_0^\infty \pi x e^{-\pi x^2}\,dx.$$

Denna integralen är generaliserad då integrationsintervallet är obegränsat. Då integranden är begränsad på hela $\mathbb{R}$ så är integralen enbart generaliserad av denna anledningen. Vi visar att integralen är konvergent genom att explicit studera det motsvarande gränsvärdet och beräkna dess värde.

Enligt definitionen behöver vi beräkna

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \pi x e^{-\pi x^2}\,dx.$$

För ett givet $R > 0$ kan vi använda variabelbytet $u = x^2$ för att beräkna integralen

$$\begin{aligned}\int_0^R \pi x e^{-\pi x^2}\,dx &= \left\{\begin{array}{ll} u = x^2, & du = 2x\,dx \\ x = 0 \Leftrightarrow u = 0, & x = R \Leftrightarrow u = R^2 \end{array}\right\} \\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{R^2} e^{-\pi u}\,du = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{e^{-\pi u}}{\pi}\right]_0^{R^2} = \frac{1}{2} - \frac{e^{-\pi R^2}}{2}.\end{aligned}$$

Vi ser att

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \pi x e^{-\pi x^2}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{e^{-\pi R^2}}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Den generaliserade integralen är därav konvergent och dess värde, och därav den sökta volymen, är $\frac{1}{2}$.

Svar: Volymen är $\dfrac{1}{2}$ volymenheter.

8. Vi söker att använda en kombination av räkneregler för integraler och instängningssatsen.

Då $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ är avtagande på $(0, \infty)$ har vi att för varje $x \in [n, n+1]$ så är $\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Eftersom $e^{\pi x} > 0$ har vi därför olikheterna

$$\frac{e^{\pi x}}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{n}} \quad \text{för alla } x \in [n, n+1].$$

Räknereglerna för integraler ger oss därför att för varje $n \geq 1$ att

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \int_n^{n+1} e^{\pi x}\, dx \leq \int_n^{n+1} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{n+1} e^{\pi x}\, dx.$$

Integralen som står längst till höger och längst till vänster kan vi beräkna:

$$\int_n^{n+1} e^{\pi x}\, dx = \frac{e^{\pi(n+1)} - e^{\pi n}}{\pi}.$$

Därav kan olikheterna ovan också skrivas som

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \frac{e^{\pi(n+1)} - e^{\pi n}}{\pi} \leq \int_n^{n+1} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{e^{\pi(n+1)} - e^{\pi n}}{\pi}.$$

Om vi multiplicera med den positiva faktorn $\frac{\sqrt{n}}{e^{\pi n}}$ som fanns med i gränsvärdet har vi visat att för varje $n \geq 1$ gäller det att

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} \leq \frac{\sqrt{n}}{e^{\pi n}} \int_n^{n+1} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}}\, dx \leq \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}.$$

Från instängningssatsen och att $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+1/n}} = 1$ så har vi bevisat att

Svar:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\pi n}} \int_n^{n+1} \frac{e^{\pi x}}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi}.$$