Tentamen: TMV170/MMGD30 Matematisk analys

2021-03-18, 14:00-18:00/20:00

14.00 – 18.00/20.00: Tentamen – skriv alla svar på papper eller skrivplatta; 18.00 – 18.30/20.00-20.45: Förbered filer – ta bilder eller skanna och ladda upp i CANVAS. Om problem uppstår använd e-mail istället (zorank@chalmers.se).

Examinator: Zoran Konkoli, telefon 5480, MC2, Chalmers

Telefonvakt: Zoran Konkoli, telefon: 5480

Hjälpmedel: Detta är en hemtentamen och alla medel är tillåtna. **Viktigast är att visa alla kritiska steg i uträkningarna.** Uppgifterna kräver ingen miniräknare.

Hela tentamen ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 5 poäng. TMV170: För betyg 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyg 4 krävs 30 poäng, och för betyg 5 krävs 40 poäng. MMGD30: för betyg G krävs minst 20 poäng, och för VG krävs minst 36 poäng. Tid och plats för granskning av tentamen kommer att anslås på kursens hemsida. **Ett tröskelbaserat system tillämpas för betygsättning och rättning. Beskrivningen finns på CANVAS.**

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z? Svaret skall inte innehålla trigonometriska funktioner.

$$z = \frac{(2+i)\left(e^{12\pi i} - e^{\frac{\pi}{2}i}\right)}{1 - i^{4\cdot 3276+3}}$$

2. Välj konstanten a så att funktionen har en sned asymptot lika med $y = 9x + 24$.

$$f(x) = \frac{9x^3 + 2ax^2 + 7}{x^2 - 3}$$

3. Beräkna gränsvärdet:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x \ln\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2 - 4}$$

4. Bestäm konstanten c så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{113} + x^{89} - 2x}{x-1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

är kontinuerlig i R. (a) Förklara först varför funktionen är kontinuerlig i alla $x \neq 1$. (b) Förklara sedan hur du kan välja c att funktionen är kontinuerlig i $x = 1$. Ange villkoret för kontinuitet och visa tydligt hur du använder villkoret för kontinuitet för att lösa problemet.

5. Beräkna $f\left(1 + \frac{1}{100}\right)$ i linjär approximation (utan att använda räknaren). Använd $x = 1$ som referenspunkt.

$$f(x) = \tan\left(\frac{x\pi}{4}\right) + e^{\pi(x-1)}$$

6. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna $f'(x)$. Uttrycket går inte att förenkla (förlora inte tid på att försöka förenkla).

$$f(x) = \frac{\sin x}{\ln x} + xe^x + \sin\left(x^3 + \sqrt{x}\right)$$

7. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$32yx^3 = (x + y)^5$$

8. Omvandla alla uttryck till en form $A(x) + B(x)\,dx$. Notera att A och B kommer att variera från fall till fall. Ange också storleksordning för varje fall (TAS0 eller TAS1).

(a) $d(x^5) = ?$

(b) $\ln((x + dx)^3) - \ln(x^3) = ?$

(c) $\sqrt{x + dx}\,\sin(x + dx) = ?$

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Använd ekvationen nedan för att hitta $f(x)$. Använd en variabelsubstitution som passar problemet.

$$\int f(x)\sin(x + 3)dx = \int \frac{(u + 1)^2}{u}\sin(u)du$$

10. En ingenjör löser en icke-linjär DE med begynnelsevillkoren $y(0) = -6$ och $y'(0) = 1$ och får det här uttrycket

$$y(x) = \left(\int e^x dx\right)\left(\int \cos x\, dx\right)$$

som vi inte ifrågasätter. Hen forsätter med att skriva

$$y(x) = e^x \sin x + c_1$$

och *resonerar* på följande sättet. *Vi kan bestämma den fria konstanten som vanligt:* $-6 = y(0) = c_1$. *Som tur för mig, det andra villkoret* $1 = y'(0)$ *stämmer automatisk. Alltså svaret är* $y(x) = e^x\, sin\, x - 6$. Tyvärr, det här resonemanget är inte korrekt. Identifiera alla fel i uträkningen. **Visa hur man gör rätt!**

11. Lös differentialekvationen $(1 + x^2)y' = 1 + y^2$ med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$. Använd separationstekniken för att hitta lösningen i implicit form. Det går att omvandla lösningen till en rationell funktion. Gör det snälla.

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

12. En kurva definieras med $y = f(x)$ i intervallet $[0, a]$ där den högra kanten a ändras i tid. Vi börjar i $t = 0$ med $a = 0$. Hur skall vi förändra a så att längden av kurvan ökar med en konstant hastighet $v = 1$? Konstruera en differentialekvation för a i form $\frac{da}{dt} = h(a, f)$ och specificera hur h beror på f. Ange begynnelsevillkoret. Lös differentialekvationen för (i) $f(x) = x$ och (ii) $f(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

13. Betrakta en vattenbehållare i form av ett rätblock med sidorna $a = 1$, $b = 2$, och $c = 3$. Vi ändrar a från 1 till $1 + 1/10$, och justerar samtidigt b och c så att volymen och den längsta diagonalen inte ändras. Använd differentialkalkyl att skatta ändringar i b och c.