Tentamen: TMV170/MMGD30 Matematisk analys

2020-08-25, 08:30-13:00/15:00

08.30 – 12.30: Tentamen – skriv alla svar på pappret; 12.30 – 13.00: Förbered filer – ta bilder eller skanna och ladda upp i CANVAS. Om problem uppstår skicka över ett e-mail till examinatorn (zorank@chalmers.se).

Examinator: Zoran Konkoli, telefon 5480, MC2, Chalmers

Telefonvakt: Zoran Konkoli, telefon: 5480

Hjälpmedel: Detta är en hemtentamen och alla medel är tillåtna. **Därför är det extra viktig att alla argumenterar noggrant och förklarar kritiska steg i alla uträkningar.** Uppgifterna kräver ingen miniräknare.

Hela tentamen ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 5 poäng. TMV170: För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. MMGD30: för betyget G krävs minst 20 poäng, och för VG krävs minst 36 poäng. Tid och plats för granskning av tentamen kommer att anslås på kursens hemsida.

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z?

$$z = \frac{(3+2i^{19})(2-3i^{1015})}{(1+i)(1-2i)}$$

2. Beräkna förändringen

$$\Delta[x^2 \ln x - x\cos(\pi x)]$$

som motsvarar förskjutning i x från 1 (referens värdet) till 1.1 (det nya värdet). Använd linjär approximation. Ökar eller minskar $x^2 \ln x - x\cos(\pi x)$?

3. Vi betraktar en funktion $f: R \to R$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{101} + x^{50} - 2}{x^3 - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i R?

4. Gränsvärdet

$$\lim_{h\to 0} \frac{he^{(7+h)^2} - he^{49}}{h^2} = f'(x_0)$$

kan utryckas som derivatan av en funktion f i punkten $x = x_0$. Hitta x_0, skriv formeln för $f(x)$, $f'(x)$, och slutligen beräkna $f'(x_0)$.

5. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna den andra derivatan av $f(x)$, alltså $f''(x)$.

$$f(x) = e^x \ln x - x^2 \sin x + 7x^3 + 8$$

6. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$2x = \frac{1}{y} + y^4$$

7. Betrakta integraler I_1, I_2, och I_3 definierade som

$$I_1 = \int_0^1 [(\pi x)^3 - \sin(\pi x) + 15\cos(\sqrt{\pi x})]dx$$

$$I_2 = \int_0^\pi [u^3 - \sin u]du$$

$$I_3 = \int_0^\pi \cos(\sqrt{u})du$$

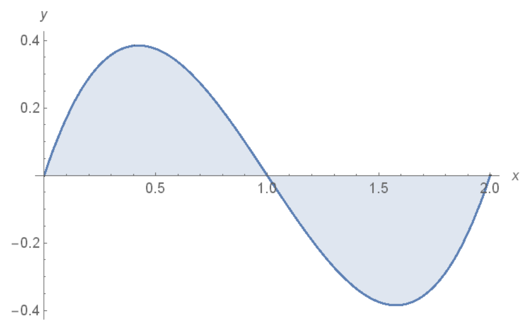
Utan att räkna den primitiva funktionen hitta konstanterna a och b så att $I_1 = aI_2 + bI_3$.

8. Räkna nedanstående integral med partiellintegrationstekniken.

$$\int_0^\pi x^2 \sin x \, dx$$

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Vi klipper en kurvig kartong som bilden visar. Om man lägger kartongen in det Cartesiska koordinatsystemet där den raka delen sammanträffar med x led, den böjda konturen definieras med $y = x(x-1)(x-2)$ för $x \in [0,2]$. Hitta kartongens area.

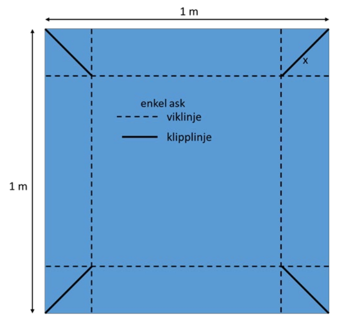


10. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x) - \cos(3x)}{x^2}$$

11. Två grafer som definieras med $y_1 = (x-2)^2$ och $y_2 = -4 + 6x - x^2$ skär varandra med vinkeln α. Notera att skärningsvinkelen α definieras med de två tangent linjerna i skärningspunkten. Gör en skiss av hur grafer ser ut. Beräkna det exakta värdet av $\tan \alpha$ och ange svaret i formen $\tan \alpha = n/m$ där n och m är heltal som inte är noll. Alltså att räkna med miniräknare ger inga poäng.

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)



12. Betrakta kartongen i den övre bilden. Kartongen har dimensioner 1 m x 1 m. Vi klipper kartongen som bilden visar för att senare göra en öppen ask (den nedra bilder) som skall fyllas med kakor. Hur djupt skall vi klippa från kanterna (variabel x) för att få så många kakor som möjligt, alltså att få lådan med den största möjliga volymen V? Utryck svaret i $x =$ "tal" där "tal" är angiven i exakt form (inte decimaler). Rita grafen (för hand) som visar hur lådans volym V beror på x, $V = f(x)$. Vad är den minsta tillåtna värdet för x? Vi kallar den för x_{min}. Vad är den största tillåtna värdet för x? Vi kallar den för x_{max}. Hur mycket är $f(x_{min})$ och $f(x_{max})$?

13. Ekvationen

$$x^2 + x = xy + x^3y^4$$

har lösningen $L_1 = (x_1, y_1)$ med $x_1 = 1$ och $y_1 = 1$. Betrakta lösningen $L_2 = (x_2, y_2)$ med känd $x_2 = 1.1$ och okänd y_2. Ekvationen definierar $y = f(x)$ implicit. Försök hitta y_2, alltså $y_2 = f(x_2)$, genom att använda Taylor utveckling kring den naturliga referens punken för problemet. Använd bägge linjär och kvadratisk approximation. Gör uträkning med den första grads approximation, och bara diskutera kritiska steg i den andra grads approximation. Att försöka gissa y_2 är naturligt, och kan vara ett steg att kolla resultat, men att bara gissa ger inga poäng. Förklara hur Taylor utveckling kan användas för att lösa problemet.

Formel blad

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$(fg)' = f'g + fg'$
$(\sin x)' = \cos x$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(e^x)' = e^x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\int u\, dv = uv - \int v\, du$	$df = f'(x)dx, \Delta f \approx f'(x)\Delta x$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'(g)g'(x)$
$e^x > 1$ för $x > 0$	$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$