Tentamen: TMV170/MMGD30 Matematisk analys

2020-06-08, 14:00-18:00/18:30

14.00 – 18.00: Tentamen – skriv alla svar på pappret; 18.00 – 18.30: Förbered filer – ta bilder eller skanna och ladda upp i CANVAS. Om problem uppstår skicka över ett e-mail till examinatorn (zorank@chalmers.se).

Examinator: Zoran Konkoli, telefon 5480, MC2, Chalmers

Telefonvakt: Zoran Konkoli, telefon: 5480

Hjälpmedel: Detta är en hemtentamen och alla medel är tillåtna. **Därför är det extra viktig att alla argumenterar noggrant och förklarar kritiska steg i alla uträkningar.** Uppgifterna kräver ingen miniräknare.

Hela tentamen ger 50 poäng. Eventuella bonuspoäng från duggor adderas innan betyget räknas. Godkänt på alla duggor ger 5 poäng. TMV170: För betyget 3 på tentamen krävs minst 20 poäng, för betyget 4 krävs 30 poäng, och för betyget 5 krävs 40 poäng. MMGD30: för betyget G krävs minst 20 poäng, och för VG krävs minst 36 poäng. Tid och plats för granskning av tentamen kommer att anslås på kursens hemsida.

Grupp 1: G frågor (8 x 3p)

1. Vad är realdelen och imaginärdelen av z?

$$z = \frac{(2+4i^{73})(3-6i^{69})}{(2+i)(3-i)}$$

2. För funktionen

$$y = x\ln x - \sin(\pi(x-1))$$

beräkna Δx och Δy i linjär approximation som motsvarar ändringen från $x = 1$ (referens värdet) till $x = 1.1$ (det nya värdet). Ökar eller minskar y?

3. Vi betraktar en funktion $f: R \to R$ definierad som

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^7 + 4x - 5}{x^5 - 1} & x \neq 1 \\ c & x = 1 \end{cases}$$

I formeln $x^5 - 1 = (x-1)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)$ det är sant att $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 > 0$ för varje $x \in R$. Går det att definiera konstanten c så att funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i R?

4. Gränsvärdet

$$\lim_{u\to 1} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right) - \tan\frac{\pi}{4}}{u-1} = f'(x_0)$$

kan utryckas som derivatan av en funktion f i punkten $x = x_0$. Hitta x_0, skriv formeln för $f(x)$, $f'(x)$, och slutligen beräkna $f'(x_0)$.

5. Funktionen f är definierad som nedan. Beräkna den tredje derivatan av $f(x)$; alltså $f'''(x) =$?

$$f(x) = x^3 \ln x - x^5 + 7$$

6. Beräkna derivatan $\frac{dy}{dx}$ i punkten $x = 1$ och $y = 1$. Funktionen definieras som nedan. Använd implicit derivering.

$$x^2 + 5 = 5xy + x^2y^3$$

7. Går det att hitta fria konstanter a och b så att funktionen $f(x)$ är deriverbar för alla reella tal? Om ”ja”, förklara varför och hitta konstanterna. Om ”inte”, förklara varför.

$$f(x) = \begin{cases} ae^{x^2-1} & x < 1 \\ e^{b(x-1)} & x \geq 1 \end{cases}$$

8. Räkna nedanstående integral med partiellintegrationstekniken.

$$\int x^2 e^x dx$$

Grupp 2: VG frågor (3 x 4p)

9. Polynomet $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ har inga noll punkter i intervallet $[1,3]$. Förklara varför det måste vara så. Att använda Mathematica (eller liknande) för att rita grafen och argumentera utifrån detta ger inga poäng. För att få poäng överhuvudtaget är det viktig att man använder alla sina analyskunskaper om grafritning (vad derivata betyder, extrema punkter, konvexa vs konkava grafer, etc). Använd dessa analys kunskaper att göra en skiss av grafen.

10. Hitta lösningen till differentialekvationen med separationstekniken

$$(xy^2 + x)dx + (x^2y - y)dy = 0$$

där lösningen definieras med begynnelsevillkoret $y(0) = 1$.

11. Hitta lösningen till differentialekvationen

$$y''(x) - 6y'(x) + 10y(x) = x + 1$$

med begynnelsevillkoren $y(0) = 0$ och $y'(0) = \frac{1}{10}$. Tips: den partikulära lösningen kan letas i formen $y_p(x) = ax + b$ där a och b är konstanter.

Grupp 3: MVG frågor (2 x 7p)

12. Ekvationen $e^x = 1 + x$ har en lösning i $x = 0$. Visa att ekvationen inte kan ha andra lösningar. Att använda Mathematica (eller liknande) för att rita grafen och argumentera utifrån detta ger inga poäng. För att få poäng man måste verkligen använda analyskunskaper. En analys sats är viktig i sammanhanget.

13. Beräkna gränsvärdet

$$\lim_{x\to 1}\left[\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{\pi(x^2-1)}{4x\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right] = ?$$

Formel blad

$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$	$(f \pm g)' = f' \pm g'$
$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$	$(fg)' = f'g + fg'$

$(\sin x)' = \cos x$	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\ln \lvert x \rvert)' = \frac{1}{x}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$	$(e^x)' = e^x$
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$
$\int u\, dv = uv - \int v\, du$	$df = f'(x)dx, \Delta f \approx f'(x)\Delta x$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx} f\big(g(x)\big) = f'(g)g'(x)$
$e^x > 1$ för $x > 0$	$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$